Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP†
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT W. SÜSS

67. BAND, 4. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 29. MAI 1957)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1957

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**
wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote u. ä., von den Zeitschriftenheften, von einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgendmöglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hierzu unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21 b.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 28/30. — Göttingen, Weender Straße 60.

---

67. Band **Inhalt** 4. Heft

Seite

Nachruf auf Konrad Knopp

Basu, S. K., On comparison of the total strength of some Hausdorff methods . . . 303

Rajagopal, C. T., On a theorem of Frobenius and Knopp for Abel summability . . 310

Albrecht, R., Auswahlverfahren bei linearer Limitierung 320

Lingenberg, R., Zur Einführung von Koordinaten in einer projektiven Ebene mit Hilfe von Endomorphismen transitiver Translationsgruppen 332

Walter, W., Über die Euler-Poisson-Darboux-Gleichung 361

Collingwood, E. F., On sets of maximum indetermination of analytic functions . 377

Konrad Knopp †

Am 30. April 1957 ist KONRAD KNOPP im 75. Lebensjahr unerwartet auf einer Reise verstorben; er erlag in Annecy bei Genf einem Schlaganfall. Damit ist das Leben eines Mathematikers zu Ende gegangen, der in seltener Weise die Gaben eines fruchtbaren Forschers und mitreißenden Lehrers mit der Anziehungskraft einer warmherzigen, weltoffenen und vornehmen Persönlichkeit vereinte.

KNOPPs Forscherarbeit galt der Reihenlehre und vor allem der Limitierungstheorie, deren Entwicklung er stark beeinflußt hat. Auf weite Kreise wirkten und wirken seine Lehrbücher: Die dreibändige „Einführung in die höhere Mathematik", die durch Bearbeitung des von Mangoldtschen Werkes entstand, die „Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen" und besonders die fünf Bändchen über Funktionentheorie.

Im Jahre 1918 begründeten KNOPP, L. LICHTENSTEIN, E. SCHMIDT und I. SCHUR gemeinsam die Mathematische Zeitschrift. Nach dem Tode LICHTENSTEINs übernahm KNOPP 1933 die Herausgabe. Mit der ihm eigenen gewinnenden Verbindung von Festigkeit, Takt und feinem Humor verstand er es, die Schriftleitung durch alle Schwierigkeiten der folgenden zwanzig Jahre zu führen und das Ansehen der Zeitschrift nicht nur zu wahren, sondern noch zu erhöhen. Auch nachdem er 1952 das Amt des Herausgebers abgegeben hatte, war er stets bereit, in Bedarfsfällen wieder einzuspringen und beteiligte sich bis in die letzten Tage rege an der redaktionellen Arbeit. Sein Tod hinterläßt eine schmerzlich empfundene Lücke.

Die Schriftleitung.

Basu, S. K.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 303—309 (1957)

On comparison of the total strength of some Hausdorff methods

By
S. K. Basu

Introduction. The problem of total relative strength (for this definition see [2], p. 51, footnote) of some Hausdorff methods (H-methods) or matrices defining such methods (for properties of Hausdorff matrices see [6], Chapter XI or [7]) has already been considered by the author in some previous papers ([1], [3], [4]). The present note deals with the question of total relative strength of some more matrices of this kind (these matrices are listed in § 1 below).

1. The Hausdorff transformation of a *real* sequence $\{s_n\}$ is defined by

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} \mu_k \cdot s_k \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

where $\{\mu_n\}$ is a given factor sequence and

$$\Delta^0 \mu_k = \mu_k, \quad \Delta^n \mu_k = \Delta^{n-1} \mu_k - \Delta^{n-1} \mu_{k+1} \qquad (n \geq 1).$$

If H denotes the matrix transformation (1), we write $H \sim \mu_n$. The following are some of the special cases of H-methods with which we shall be concerned here:

$$\Gamma_\beta^\alpha \sim \left(\frac{\beta}{n+\beta}\right)^\alpha \qquad (\alpha, \beta > 0).$$

In particular, $\Gamma_1^\alpha = H^\alpha$, the Hölder matrix; and $\Gamma_\beta^1 = \Gamma_\beta \approx \Gamma_1 = \Gamma_1^1 = H^1$, the arithmetic mean matrix (the notation $\approx$ stands for the equivalence of the two matrices. For this definition see [6], p. 66).

Exponential matrix: $J^\beta \sim e^{-\beta n^{\frac{1}{2}}} \qquad (\beta > 0)$.

These matrices are all totally regular (for the definition of total regularity see [6], p. 53 or [1], p. 450 and for the conditions of total regularity of H-methods see [1], p. 451). The total regularity of H^α is well known and the same for Γ_β^α follows immediately. The total regularity of J^β is a direct consequence of the total monotony of the sequence $e^{-\beta n^{\frac{1}{2}}}$ (see [7], p. 97 or [6], p. 269).

It is well known that

$$\Gamma_\beta^\alpha \approx H^\alpha \qquad ([6], \text{p. } 265).$$

Regarding Γ_β^α the following theorem will be proved.

Theorem 1. (i) *The total strength of* Γ_β^α *increases along with* α, β *remaining constant.*

(ii) *The total strength of* Γ_β^α *increases with decreasing* β, α *remaining constant.*

Proof. (i) For the regular matrix $\Gamma_\beta^\alpha/\Gamma_\beta^{\alpha'}$ $(\alpha>\alpha'>0)$ (the regularity of this matrix follows immediately from the properties of Γ_β^α (see [7], p. 88)) the moment function $\mu(t)$ is given by

$$\mu(t)=\left(\frac{\beta}{t+\beta}\right)^\alpha\Big/\left(\frac{\beta}{t+\beta}\right)^{\alpha'}=\left(\frac{\beta}{t+\beta}\right)^{\alpha-\alpha'}.$$

Since

$$\Gamma_\beta^{\alpha-\alpha'}\sim\left(\frac{\beta}{t+\beta}\right)^{\alpha-\alpha'}\qquad(\alpha>\alpha'),$$

it follows that $\mu(t)$ is totally monotone and consequently, Γ_β^α is totally stronger than $\Gamma^{\alpha'}$.

(ii) Again, for $\Gamma_\beta^\alpha/\Gamma_{\beta'}^\alpha$ $(\beta'>\beta)$,

$$\mu(t)=(\beta/\beta')^\alpha\cdot\left(\frac{t+\beta'}{t+\beta}\right)^\alpha=e^{\varrho(t)},\quad\text{say.}$$

Then

$$\varrho(t)=\alpha\log\beta/\beta'+\alpha\{\log(t+\beta')-\log(t+\beta)\};$$

and

$$(-1)^k\varrho^{(k)}(t)=\alpha(k-1)!\left\{\frac{1}{(t+\beta)^k}-\frac{1}{(t+\beta')^k}\right\}>0\quad(t>0)\qquad(k=1,2,3,\ldots).$$

Consequently, as $\varrho(0)=\varrho(+0)$, $\mu(t)$ is totally monotone for $t\geq 0$ when $\alpha,\beta'-\beta>0$ (see [7], p. 95) and the result follows.

From Theorem 1, with the aid of a known lemma ([1], p. 452), we have at once the following results.

Theorem 2. *If* $\alpha>0$,

(i) *for* $0<\beta<1$, $\Gamma_\beta^\alpha\ t\cdot s\cdot H^\alpha$ *but* $H^\alpha\ n\cdot t\cdot s\cdot\Gamma_\beta^\alpha$;

(ii) *for* $\beta>1$, $H^\alpha\ t\cdot s\cdot\Gamma_\beta^\alpha$ *but* $\Gamma_\beta^\alpha\ n\cdot t\cdot s\cdot H^\alpha$.

(For the notations used here see [3], p. 390.)

Theorem 3.

(i) *For* $\alpha>1$, $\Gamma_\beta^\alpha\ t\cdot s\cdot\Gamma_\beta$. (ii) *When* $0<\alpha<1$, $\Gamma_\beta\ t\cdot s\cdot\Gamma_\beta^\alpha$.

(iii) *For* $0<\beta<1$, $\Gamma_\beta\ t\cdot s\cdot H^\beta$. (iv) *When* $\beta>1$, $H^\beta\ t\cdot s\cdot\Gamma_\beta$.

2. For the regular matrix J^α/J^β $(\alpha>\beta>0)$ the moment function

$$\mu(t)=e^{-(\alpha-\beta)t^{\frac{1}{\beta}}}$$

is totally monotone. Hence

$$J^\alpha\ t\cdot s\cdot J^\beta\qquad(\alpha>\beta>0);$$

so that the total strength of J^β increases with β.

It is well known that for $\alpha,\beta>0$, J^β is stronger than H^α (see [6], p. 270, Theorem 214). It is natural to inquire if J^β is also totally stronger than H^α. In this connection, the following theorem will be proved.

Theorem 4.

(i) *For* $\alpha \geq \beta$, $J^\beta n \cdot t \cdot s \cdot H^\alpha$. (ii) *For* $\beta \geq \left(\frac{2\pi}{e}\right)^{\frac{1}{2}} \alpha$, $J^\beta t \cdot s \cdot H^\alpha$.

For the proof of the theorem we require the following lemma.

Lemma 1. *The sequence* $\{u_n\}$ *for which*

$$u_n = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\frac{1}{2})} \cdot \frac{(2n-1)^{(2n-1)/2}}{(2n)^n} \qquad (n \geq 2)$$

is $\uparrow$ *and* $\to \frac{1}{\sqrt{2e}}$.

Proof. We have

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{(2n+1)/2} = d^{\frac{1}{2}}, \text{ say.}$$

Then $$d = \frac{n+1}{n} \left\{\frac{(n+1)(2n-1)}{n(2n+1)}\right\}^{2n+1} = \frac{1+\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{2n^2+n-1}\right)^{2n+1}}.$$

Since $\frac{2n+1}{2n^2+n-1} > \frac{1}{n}$,

$$\left(1+\frac{1}{2n^2+n-1}\right)^{2n+1} > 1+\frac{2n+1}{2n^2+n-1} > 1+\frac{1}{n}.$$

Hence $d<1$; and consequently, $u_n/u_{n+1}<1$, so that $u_n \uparrow$.

Again,

$$u_n = \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{(2n-1)/2} \cdot \frac{\Gamma(n)}{\sqrt{2n}\,\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{(2n-1)/2}} \cdot \frac{\Gamma(n)}{\sqrt{2n}\,\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)} \to \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2e}},$$

since $\frac{\Gamma(n)}{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)} \sim n^{\frac{1}{2}}$. This proves the lemma.

Proof of Theorem 4. For the regular matrix J^β/H^α the moment function is

$$\mu(t) = (t+1)^\alpha e^{-\beta t^{\frac{1}{\beta}}} \qquad (\alpha, \beta > 0). \tag{2}$$

Hence for $t>0$,

$$\mu'(t) = \alpha(t+1)^{\alpha-1} e^{-\beta t^{\frac{1}{\beta}}} - \frac{\beta}{2}(t+1)^\alpha e^{-\beta t^{\frac{1}{\beta}}} t^{-\frac{1}{2}}.$$

Therefore,

$$\mu'(1) > 0, \quad \text{as} \quad \alpha > \beta.$$

Consequently, for $\alpha > \beta$, $\mu(t)$ is not totally monotone for $t \geq 0$; and this implies that

$$J^\beta n \cdot t \cdot s \cdot H^\alpha \quad \text{for} \quad \alpha > \beta.$$

Again, for $\alpha=\beta$ as $\mu'(1)=0$, $\mu(t)$ cannot be totally monotone for $t\geq 0$ (see [8], pp. 167—168) and the proof of (i) is complete.

For the proof of (ii) (here we have essentially followed the method indicated very briefly by HAUSDORFF ([7], p. 98)) we put

$$\mu(t)=(t+1)^{\alpha}e^{-\beta t^{\frac{1}{2}}}=e^{\varrho(t)}.$$

Then

$$\varrho(t)=\alpha\log(t+1)-\beta t^{\frac{1}{2}};$$

and

$$-\varrho'(t)=\frac{\beta}{2}t^{-\frac{1}{2}}-\frac{\alpha}{t+1}>0 \qquad \text{for } t>0, \text{ since } \beta>\alpha.$$

Again,

$$(-1)^n\varrho^{(n)}(t)=\beta\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2^n}t^{-\frac{2n-1}{2}}-\alpha\frac{(n-1)!}{(t+1)^n} \qquad (n\geq 2).$$

Therefore, for $t>0$,

$$(-1)^n\varrho^{(n)}(t)\geq 0 \qquad (n=2,3,4,\ldots),$$

if

$$\beta\frac{(t+1)^n}{t^{(2n-1)/2}}\geq 2\alpha\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\frac{1}{2})} \qquad (n=2,3,4,\ldots;t>0). \tag{3}$$

On putting

$$f(t)=\frac{(t+1)^n}{t^{(2n-1)/2}} \qquad (t>0),$$

it is easily seen that for a given n,

$$\min f(t)=\frac{(2n)^n}{(2n-1)^{(2n-1)/2}}.$$

Hence (3) certainly holds for $t>0$ if

$$\frac{\beta}{2\sqrt{\pi}\alpha}\geq\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\frac{1}{2})}\cdot\frac{(2n-1)^{(2n-1)/2}}{(2n)^n} \qquad (n\geq 2)$$

or, if

$$\frac{\beta}{2\sqrt{\pi}\alpha}\geq\max(u_2,u_3,u_4,\ldots), \tag{4}$$

where

$$u_n=\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\frac{1}{2})}\cdot\frac{(2n-1)^{(2n-1)/2}}{(2n)^n}.$$

Now it follows from Lemma 1 that

$$\text{l.u.b. of } u_n=\frac{1}{\sqrt{2e}}.$$

Accordingly, (4) will certainly be satisfied if

$$\frac{\beta}{2\sqrt{\pi}\alpha}\geq\frac{1}{\sqrt{2e}}, \qquad \text{that is, if} \qquad \beta\geq\left(\frac{2\pi}{e}\right)^{\frac{1}{2}}\alpha.$$

Since $\varrho(0)=\varrho(+0)$, it, therefore, follows that $\mu(t)$ is totally monotone for $t\geq 0$ when $\beta\geq\left(\frac{\pi e}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\alpha$. This completes the proof of (ii).

3. After the proof of Theorem 4 the question naturally arises as to whether or not

$$J^{\beta}t\cdot s\cdot H^{\alpha}$$

for $\alpha<\beta<\left(\frac{2\pi}{e}\right)^{\frac{1}{2}}\alpha$. While we are unable to answer this question completely, the next theorem gives a partial answer.

Theorem 5. *For* $\alpha<\beta<\frac{3\sqrt{3}}{4}\alpha$, $J^{\beta}n\cdot t\cdot s\cdot H^{\alpha}$.

We require the following lemma.

Lemma 2. *If $f(t)$ is totally monotone for $t\geq 0$ and not identically zero, then it is logarithmically convex for $t\geq 0$* (see [8], p. 167).

Proof of the Theorem. We have from (2),

$$\log\mu(t)=\alpha\log(t+1)-\beta t^{\frac{1}{2}}.$$

Therefore,

$$\frac{d}{dt}\log\mu(t)=\frac{\alpha}{t+1}-\frac{\beta}{2}t^{-\frac{1}{2}},$$

and

$$\frac{d^2}{dt^2}\log\mu(t)=-\frac{\alpha}{(t+1)^2}+\frac{\beta}{4}t^{-\frac{3}{2}}.$$

Hence

$$\frac{d^2}{dt^2}\log\mu(t)<0 \text{ for some } t>0,$$

if there is some $t>0$ for which

$$\frac{\alpha t^{\frac{3}{2}}}{(t+1)^2}>\frac{\beta}{4}. \tag{5}$$

Now, for $t>0$ the function

$$\varphi(t)=\frac{t^{\frac{3}{2}}}{(t+1)^2}$$

is maximum at $t=3$. Then (5) holds with $t=3$, if

$$\frac{3\sqrt{3}}{16}\alpha>\frac{\beta}{4}, \quad \text{that is} \quad \beta<\frac{3\sqrt{3}}{4}\alpha.$$

Thus for $\alpha<\beta<\frac{3\sqrt{3}}{4}\alpha$, by Lemma 2, $\mu(t)$ cannot be totally monotone and consequently,

$$J^{\beta}n\cdot t\cdot s\cdot H^{\alpha}.$$

4. As the arithmetic mean method plays an important rôle in the theory of summability it may not be out of place to give here a complete treatment

for the comparison of the total strength of this method and the exponential method. This is contained in our last theorem.

Theorem 6. *For* $\beta \geq \frac{3}{2}$, $J^\beta t \cdot s \cdot H^1$;

for $\beta < \frac{3}{2}$, $J^\beta n \cdot t \cdot s \cdot H^1$.

Proof. We note that a sequence $\{\mu_n\}$ is totally monotone if and only if it has a representation

$$\mu_n = \int_0^1 u^n \, d\chi(u),$$

where the mass function $\chi(u) \geq 0$ is bounded and $\uparrow$ in $[0, 1]$ (see [7], pp. 102 to 103 or [1], p. 451). Suppose now that $\chi(u)$ is continuous in $[0, 1]$ and has in $(0, 1)$ a continuous derivative $\chi'(u) = \varphi(u)$, so that

$$\mu_n = \int_0^1 u^n \varphi(u) \, du.$$

Putting $u = e^{-t}$ we have, with $\Phi(t) = u\varphi(u) \geq 0$ for $t > 0$,

$$\mu_n = \int_0^\infty e^{-nt} \Phi(t) \, dt.$$

Let us now take $\mu_n = e^{-\beta n^{\frac{1}{2}}}$, so that

$$\Phi(t) = \frac{\beta}{2\sqrt{\pi}} e^{-\beta^2/(4t)} \cdot t^{-\frac{3}{2}} \quad (\beta, t > 0) \qquad \text{(see [7], p. 91).}$$

For the regular matrix J^β/H^1 the moment sequence $\{M_n\}$ is given by

$$\begin{aligned} M_n &= (n+1)\, e^{-\beta n^{\frac{1}{2}}} \\ &= \int_0^\infty [\Phi(t) + \Phi'(t)]\, e^{-nt} \, dt \qquad \text{([7], p. 90)} \\ &= \int_0^\infty e^{-nt} \Psi(t) \, dt, \end{aligned}$$

where $\Psi(t) = \Phi(t) + \Phi'(t)$ is continuous for $t > 0$. Hence $\{M_n\}$ is totally monotone if and only if

$$\Psi(t) \geq 0 \quad \text{for} \quad t > 0,$$

that is,

$$\frac{\beta}{2\sqrt{\pi}} e^{-\beta^2/(4t)} \cdot t^{-\frac{3}{2}} + \frac{\beta}{2\sqrt{\pi}} e^{-\beta^2/(4t)} \cdot \frac{\beta^2}{4t^2} t^{-\frac{3}{2}} - \frac{\beta}{2\sqrt{\pi}} e^{-\beta^2/(4t)} \cdot \frac{3}{2} t^{-\frac{5}{2}} \geq 0,$$

or

$$4t^2 - 6t + \beta^2 \geq 0 \quad \text{for} \quad t > 0; \tag{6}$$

and this will be the case if and only if $\beta \geq \frac{3}{2}$. The result now follows.

For $\alpha = k$, a positive integer we have from (2),

$$v(t) \equiv (t+1)^k e^{-\beta t^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \left[(t+1)e^{-\beta k \cdot t^{\frac{1}{2}}}\right]^k.$$

It follows from the proof of Theorem 6 that the moment function $(t+1)e^{-\beta t^{\frac{1}{2}}}$ corresponding to $\{M_n\}$ is totally monotone for $\beta \geqq \frac{3}{2}$ (see [1], Lemma 1 or [7], pp. 102—103). Hence $v(t)$ is totally monotone for $\beta/k \geqq \frac{3}{2}$ (see [3], Lemma 4) and this implies that

$$J^k t \cdot s \cdot H^\beta \quad \text{for} \quad \beta \geqq \tfrac{3}{2} \cdot k.$$

We have thus a stronger result than Theorem 4 (ii) when α is a positive integer. The above simple method, however, does not seem to apply to the case for non-integral values of α.

In conclusion, we would like to remark that the general question as to whether or not $J^\beta t \cdot s \cdot H^\alpha$ for $3\sqrt{3}/4\alpha \leqq \beta < \left(\frac{2\pi}{e}\right)^{\frac{1}{2}}\alpha$ still remains open, though in some sense this gap is covered by Theorem 6.

References

[1] Basu, S. K.: On the total relative strength of the Hölder and Cesàro methods. Proc. London Math. Soc. (2) **50**, 447—462 (1948). — [2] Basu, S. K.: On the total relative strength of the Riesz and Cesàro methods. J. London Math. Soc. **24**, 51—59 (1949). — [3] Basu, S. K.: On the total relative strength of some Hausdorff methods equivalent to identity. Amer. J. Math. **76**, 389—398 (1954). — [4] Basu, S. K.: On hypergeometric summability involving infinite limits. Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 226—238 (1954). — [5] Garabedian, H. L., and H. S. Wall: Hausdorff methods of summation and continued fractions. Trans. Amer. Math. Soc. **48**, 185—207 (1940). — [6] Hardy, G. H.: Divergent Series. Oxford 1949. — [7] Hausdorff, F.: Summationsmethoden und Momentfolgen. I. Math. Z. **9**, 74—109 (1921). — [8] Widder, D. V.: The Laplace transform. Princeton 1946.

The Johns Hopkins University and H. M. College, West Bengal

(Eingegangen am 14. August 1956)

RAJAGOPAL, C. T.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 310—319 (1957)

On a theorem of Frobenius and Knopp for Abel summability

By
C. T. RAJAGOPAL

Introduction

It is a classical result that sequences summable either (C, k) or (H, k), for some $k>0$, are also summable (A), i.e. summable by the Abel power-series transform, to the same sum[1]). In the case $k=1$, the result was proved by FROBENIUS [1]. In the same case, $k=1$, KNOPP [6] proved an analogous result for functions which states that $s(u)$, summable by the integral transform called its (C, k) or (H, k) mean, is summable also by the Laplace-Abel integral transform to the same sum. KNOPP's result is true for $0<k<1$, being, in fact, contained in his result for $k=1$; but it is not necessarily true for $k>1$[2]). However, there is an *indirect* extension of KNOPP's result to all $k=r_0+1>1$, provided by Theorem 1′ of this note when its $f(t)\equiv 1$. Theorem 1 preceding Theorem 1′ is an exact analogue of Theorem 1′ for a sequence s_n[3]), and its case $r_0=0$ is a result recently proved by POSTNIKOV [8].

Theorems 2 and 2′ are limiting forms of Theorems 1 and 1′, where the hypothesis of summability (σ, r_0+1), i.e. either (C, r_0+1) or (H, r_0+1), restricting s_n in Theorem 1 and $s(u)$ in Theorem 1′, is replaced by the hypothesis of summability (C, ∞) suitably defined. Theorems 2 and 2′ partly depend on two well-known theorems of KARAMATA, Propositions III and III′ of this note, and so, by implication, on the idea of WEIERSTRASS' polynomial approximations. The same idea is employed by POSTNIKOV, but it has been avoided, with a gain in simplicity, in the proofs of Theorems 1 and 1′ which generalize his theorem.

1. Notation

Given any sequence s_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$, we denote by $C_n^k(s_\nu)\equiv C_n^k$ and $H_n^k(s_\nu)\equiv H_n^k$ its (C, k) and (H, k) means respectively, for all $k>0$ ([2], pp. 96, 250–1); and we define (C, k) and (H, k) summabilities of s_n, each to l (finite), by

$$(1)\qquad C_n^k \equiv S_n^k \Big/ \binom{n+k}{n} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{\nu+k-1}{\nu} s_{n-\nu} \Big/ \binom{n+k}{n} \to l \quad (n\to\infty),$$

[1]) The notation, as far as practicable, conforms to that of HARDY [2].

[2]) This is shown by KNOPP's example of $s(u)$ summable (C, k), $k>-1$, and so equivalently summable (H, k), for which the Laplace-Abel transform does not exist.

[3]) Corresponding results, relations and definitions for a sequence s_n and a function $s(u)$ are given the same number throughout this note, but the number in the case of s_n is unaccented (e.g. 1, I, ...) while that in the case of $s(u)$ is accented (e.g. 1′, I′, ...).

(2) $$H_n^k \equiv \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \Delta^\nu H_0^k = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \frac{\Delta^\nu s_0}{(\nu+1)^k} \to l \quad (n \to \infty),$$

respectively. Summability (A) of s_n to l we define as usual by

(3) $$A(y; s_\nu) = y \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu e^{-y\nu} \to l \quad \text{as} \quad y \to +0,$$

or equivalently, by

(3a) $$A(x; s_\nu) = (1-x) \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu x^\nu \to l \quad \text{as} \quad x \to 1-0,$$

where $A(y; s_\nu)$ or $A(x; s_\nu)$ is a convergent series for $y>0$ or $0<x<1$, called the Abel or (A) power-series transform of the sequence s_n.

Next let $s(u)$ denote, as everywhere in this note, unless otherwise stated, a function bounded and Lebesgue-integrable in every finite interval of $u \geqq 0$. Then, for any $k>0$ and $u>0$, we define as usual (e.g. [5], p. 232) $C^k(u; s(x)) \equiv C^k(u)$ and $H^k(u; s(x)) \equiv H^k(u)$, the (C, k) and (H, k) means respectively of $s(u)$, and summabilities (C, k) and (H, k) of $s(u)$, each to l, by

(1') $$C^k(u) \equiv \frac{\Gamma(k+1)\, S^k(u)}{u^k} = \frac{k}{u^k} \int_0^u (u-x)^{k-1} s(x)\, dx \to l \quad (u \to \infty),$$

(2') $$H^k(u) = \frac{1}{\Gamma(k)} \frac{1}{u} \int_0^u \left(\log(u/x)\right)^{k-1} s(x)\, dx \to l \quad (u \to \infty),$$

respectively. Summability (A) of $s(u)$ to l we define by

(3') $$A\left(y; s(u)\right) = y \int_0^\infty e^{-yu} s(u)\, du \to l \quad \text{as} \quad y \to +0,$$

where the integral is supposed to be convergent for $y>0$ in the Cauchy-Lebesgue sense and called the Laplace-Abel or (A) integral transform of $s(u)$.

Summability (C, ∞) of s_n [or $s(u)$] to l involves

(4 or [4']) $$\limsup_{n \to \infty \text{ [or } u \to \infty]} C_n^r \text{[or } C^r(u)] = \overline{C}_r, \qquad \liminf_{n \to \infty \text{ [or } u \to \infty]} C_n^r \text{[or } C^r(u)] = \underline{C}_r,$$

and it is defined:

(5) $$\overline{C}_\infty \equiv \lim_{r \to \infty} \overline{C}_r = l, \quad \underline{C}_\infty \equiv \lim_{r \to \infty} \underline{C}_r = l,$$

where $\overline{C}_\infty, \underline{C}_\infty$ exist in any case, as finite numbers or not, on account of $\overline{C}_r$ in (4 or [4']) being a monotonic decreasing function of r and $\underline{C}_r$ in (4 or [4']) a monotonic increasing function of r.

Working out a notation already indicated, *we write*

(6) $$\sigma_n^k = \textit{either } C_n^k \textit{ of } (1) \textit{ or } H_n^k \textit{ of } (2),$$

(6') $$\sigma^k(u) = \textit{either } C^k(u) \textit{ of } (1') \textit{ or } H^k(u) \textit{ of } (2'),$$

with the understanding that σ, when it appears in any theorem, is to be replaced throughout by each one of C, H in turn. Further, writing $\sigma_n^0 = s_n$ and $\sigma^0(u) = s(u)$, we define summability (σ, k) to l for all $k \geq 0$ as $\sigma_n^k \to l$ $(n \to \infty)$ or $\sigma^k(u) \to l$ $(u \to \infty)$ according as we are thinking of sequences s_n or functions $s(u)$.

2. Auxiliary propositions

Of the results in this section, Propositions I and I′ give the essential content of Theorems 1 and 1′ while Propositions II and II′ taken along with Propositions III and III′ lead to Theorems 2 and 2′.

Proposition I. *If a_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ is a sequence summable $(C, 1)$ to l and if*

$$(7) \qquad \begin{cases} \psi(u) \text{ is positive monotonic decreasing for } u > 0, \\ \int_0^\infty \psi(u)\, du < \infty, \end{cases}$$

then

$$(8\text{–i}) \qquad y \sum_0^\infty a_n \psi(y n) \quad \text{converges for } y > 0,$$

$$(8\text{–ii}) \qquad y \sum_0^\infty a_n \psi(y n) \quad \text{tends to} \quad l \int_0^\infty \psi(u)\, du \quad \text{as } y \to +0.$$

Proof. Writing

$$\Psi(y, M, N) = y \sum_M^N a_n \psi(y n), \quad y > 0, \quad N \geq M + 1,$$

where M is a fixed positive integer, we shall prove (8–i) and (8–ii) in the form

$$(9) \qquad \lim_{N \to \infty} \Psi(y, M, N) \text{ exists}, \qquad \lim_{y \to +0} \lim_{N \to \infty} \Psi(y, M, N) = l \int_0^\infty \psi(u)\, du.$$

If we set $b_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ and use our hypothesis on a_n to choose M so that, for $n \geq M - 1$, $b_n = (1 + \varepsilon_n) n l$ where $|\varepsilon_n| < \varepsilon$ and $\varepsilon > 0$ is any small number, we get

$$(10) \qquad \begin{cases} \Psi(y, M, N) = y \sum_M^N (b_n - b_{n-1}) \psi(y n) \\ \qquad = y \sum_M^{N-1} b_n [\psi(y n) - \psi(y \overline{n+1})] - y b_{M-1} \psi(y M) + y b_N \psi(y N) \\ \qquad = l y \sum_M^{N-1} (1 + \varepsilon_n) n [\psi(y n) - \psi(y \overline{n+1})] - \\ \qquad\quad - l y (1 + \varepsilon_{M-1}) (M - 1) \psi(y M) + l y (1 + \varepsilon_N) N \psi(y N) \\ \qquad = l y \sum_M^N \psi(y n) + R(y, M, N), \end{cases}$$

where $R(y, M, N)$ is easily shown to satisfy the condition

$$|R(y, M, N)| \leq l\, y\, \varepsilon \sum_{M}^{N} \psi(y\, n) + 2l\, y\, \varepsilon (M-1)\, \psi(y\, M).$$

Now it is clear that

$$y \int_{M}^{N+1} \psi(y\, u)\, du \leq y \sum_{M}^{N} \psi(y\, n) \leq y \int_{M-1}^{N} \psi(y\, u)\, du \leq y \int_{0}^{\infty} \psi(y\, u)\, du.$$

Hence

$$\lim_{N\to\infty} y \sum_{M}^{N} \psi(y\, n) \text{ exists}, \quad \lim_{y\to+0} \lim_{N\to\infty} y \sum_{M}^{N} \psi(y\, n) = \int_{0}^{\infty} \psi(u)\, du. \tag{11}$$

Using (11) in (10), we obtain (9) as we wished to. For, $u\psi(u)\to 0$ as $u\to\infty$ by (7) and so $y(M-1)\psi(yM) < yM\psi(yM) < k$ independent of y and M; consequently

$$\limsup_{N\to\infty} |R(y, M, N)| \leq l\, \varepsilon \int_{0}^{\infty} \psi(u)\, du + 2lk\, \varepsilon,$$

which means, ε being arbitrary,

$$\lim_{y\to+0} \lim_{N\to\infty} R(y, M, N) = 0.$$

Proposition I′. *If $b(u)$ is a continuous function of bounded variation in every finite interval of $u \geqq 0$,*

$$b(0) = 0, \quad b(u) \sim l\, u \quad \text{as} \quad u \to \infty,$$

and if $\psi(u)$ is as in (7), then

(8′–i) $\int_{0}^{\infty} d\, b(u) \cdot \psi(y\, u)$, $y > 0$, *exists as a Cauchy-Lebesgue-Stieltjes integral, i.e. exists as the limit when $x \to \infty$ of the corresponding Lebesgue-Stieltjes integral from 0 to x, and*

$$y \int_{0}^{\infty} d\, b(u) \cdot \psi(y\, u) \to l \int_{0}^{\infty} \psi(u)\, du \quad \text{as} \quad y \to +0. \tag{8′–ii}$$

Proof. Since we may define $b(u) = 0$ for $u < 0$ and $\psi(u) = \psi(+0)$ for $u \leq 0$, we get by an integration by parts

$$\int_{0}^{x} d\, b(u) \cdot \psi(y\, u) = b(x)\, \psi(y\, x + 0) - \int_{0}^{x} b(u) \cdot d\psi(y\, u).$$

When $x \to \infty$ (y remaining fixed), $b(x)\psi(y\, x+0) \sim x\psi(y\, x+0) \to 0$ since $u\,\psi(u) \to 0$ as $u \to \infty$. Hence it is enough to prove that, for fixed $U > 0$,

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} - y \int_{U}^{x} b(u) \cdot d\psi(y\, u) \text{ exists for } y > 0, \\ \qquad \text{tending to } l \int_{0}^{\infty} \psi(u)\, du \text{ as } y \to +0. \end{cases} \tag{9′}$$

We prove this like the corresponding step in Proposition I; i.e. we choose U so that, for $u \geq U$, $b(u) = (1+\varepsilon_u) u l$, $|\varepsilon_u| < \varepsilon$, and write

$$(10') \quad -y\int_U^x b(u)\cdot d\psi(u) = -ly\int_U^x u\,d\psi(yu) - ly\int_U^x \varepsilon_u u\,d\psi(yu) = I_1 + I_2 \qquad (x > U),$$

where it is easy to see, by an integration by parts, that

$$(11') \quad \lim_{x\to\infty} I_1 \text{ exists}, \quad \lim_{y\to+0}\lim_{x\to\infty} I_1 = l\int_0^\infty \psi(u)\,du.$$

Since $|I_2| < \varepsilon I_1$, (10') and (11') together lead to our conclusion in the form (9').

Proposition II. *For a sequence* s_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, *the hypothesis* (5) *of*

summability (C, ∞) *to* l

leads to the conclusion of

summability (A) *to* l *of the* (C, r) *mean for* $r > 0$.

Proof. The proposition states that the summability in the conclusion, which may be called summability (A) (C, r), $r > 0$, includes summability (C, ∞); and it can be symbolically written:

$$(A)\,(C, r) > (C, \infty), \quad r > 0.$$

In this form the proposition is obvious from the relations

$$(A) > (C, \infty), \quad (A)\,(C, r) > (A), \quad r > 0,$$

of which the first is well known (e.g. [7], p. 199) and the second is a theorem due to Szász ([12], p. 1234).

Proposition II'. *For* $s(u)$ *defined as in* § 1, *the hypothesis* (5) *of*

summability (C, ∞) *to* l

implies the conclusion of

summability (A) *to* l *of the* (C, r) *mean for* $r \geq r_0 > 0$,

where r_0 *is such that* $\underline{C}_r, \bar{C}_r$ *are bounded for* $r \geq r_0$ *(its existence following from our hypothesis).*

Proof. We have to show that, for each $r \geq r_0$,

$$(12) \quad A\left(y; C^r(u)\right) \equiv y\int_0^\infty e^{-yu} C^r(u)\,du \to l \text{ as } y \to +0,$$

where the integral is clearly absolutely convergent for $y > 0$. (12) for $r = r$ is proved in three stages numbered below (13), (14), (15). (12) for any given $r > r_0$ is proved in the same way.

$$(13) \quad A^{r_0}(y) \equiv y^{r_0+1}\int_0^\infty e^{-yu} S^{r_0}(u)\,du = y^{r_0+k+1}\int_0^\infty e^{-yu} S^{r_0+k}(u)\,du \equiv A^{r_0+k}(y) \qquad (y > 0, k > 0)$$

$$A^{r_0}(y) \to l \quad \text{as} \quad y \to +0; \tag{14}$$

$$y\int_0^\infty e^{-yu} C^{r_0}(u)\,du = \int_y^\infty A^{r_0}(u)\cdot d\left(1-\frac{y}{u}\right)^{r_0} \to l \quad \text{as} \quad y \to +0. \tag{15}$$

To prove (13) we use a well-known formula which connects $S^{r_0+k}(u)$ and $S^{r_0}(u)$, obtaining first

$$A^{r_0+k}(y) = \frac{y^{r_0+k+1}}{\Gamma(k)}\int_0^\infty e^{-yu}\,du\int_0^u (u-x)^{k-1} S^{r_0}(x)\,dx$$

$$= \frac{y^{r_0+k+1}}{\Gamma(k)}\int_0^\infty S^{r_0}(x)\,dx\int_x^\infty e^{-yu}(u-x)^{k-1}\,du,$$

where the inversion of integrations is justified by FUBINI's theorem. We have then only to write

$$A^{r_0+k}(y) = \frac{y^{r_0+k+1}}{\Gamma(k)}\int_0^\infty e^{-yx} S^{r_0}(x)\,dx\int_0^\infty e^{-yt} t^{k-1}\,dt \qquad (t=u-x)$$

$$= \frac{y^{r_0+1}}{\Gamma(k)}\int_0^\infty e^{-yx} S^{r_0}(x)\,dx\,\Gamma(k) \equiv A^{r_0}(y).$$

To prove (14) we use in (13) the expression for $S^{r_0+k}(u)$ in terms of $C^{r_0+k}(u)$ given by (1′), and get as a first step

$$\underline{C}_{r_0+k} \leq \lim_{y\to+0}{}^{\sup}_{\inf} A^{r_0}(y) \leq \overline{C}_{r_0+k},$$

where $\underline{C}_{r_0+k}$, $\overline{C}_{r_0+k}$ are defined as in (4′). (14) follows from this step when we let $k\to\infty$ and use our hypothesis $\overline{C}_\infty = \underline{C}_\infty = l$.

Finally, to prove (15) we start with the following observation which is a result of the definition of $A^{r_0}(u)$ in (13):

$$\int_y^\infty A^{r_0}(u)\cdot d\left(1-\frac{y}{u}\right)^{r_0} = r_0\, y\int_y^\infty \frac{A^{r_0}(u)}{u^{r_0+1}}(u-y)^{r_0-1}\,du$$

$$= r_0\, y\int_y^\infty (u-y)^{r_0-1}\,du\int_0^\infty e^{-ux} S^{r_0}(x)\,dx.$$

Appealing to FUBINI's theorem and inverting the order of integrations, we get

$$\int_y^\infty A^{r_0}(u)\cdot d\left(1-\frac{y}{u}\right)^{r_0} = r_0\, y\int_0^\infty S^{r_0}(x)\,dx\int_y^\infty e^{-ux}(u-y)^{r_0-1}\,du$$

$$= r_0\, y\int_0^\infty e^{-yx} S^{r_0}(x)\,dx\int_0^\infty e^{-tx} t^{r_0-1}\,dt \qquad (t=u-y)$$

$$= y\int_0^\infty e^{-yx}\frac{S^{r_0}(x)\,\Gamma(r_0+1)}{x^{r_0}}\,dx = y\int_0^\infty e^{-yx} C^{r_0}(x)\,dx.$$

After this we can establish the limit relation in (15) by writing

$$(16) \qquad \int_y^\infty A^{r_0}(u)\cdot d\left(1-\frac{y}{u}\right)^{r_0} = \int_1^0 A(y/t)\cdot d(1-t)^{r_0} \qquad (y/u = t)$$

where $|A^{r_0}(y/t)| \equiv |A^{r_0}(u)| < K\Gamma(r_0+1)$, K being a constant independent of y and t $(y>0,\ 0<t<1)$ by our assumption that $|S^{r_0}(u)| < Ku^{r_0}$ for $0<u<\infty$. Since, for each t such that $0<t<1$, $A^{r_0}(y/t)\to l$ as $y\to+0$ by (14), (16) yields, when we appeal to the Lebesgue theorem of dominated convergence:

$$\int_y^\infty A^{r_0}(u)\cdot d\left(1-\frac{y}{u}\right)^{r_0} \to \int_1^0 l\, d(1-t)^{r_0} = l.$$

This concludes the proof.

Remarks on Propositions II, II′. (i) Proposition II is proved by me elsewhere ([9], Lemma II) in the incomplete form (14) by a circuitous method. (ii) The distinction between the (A) transforms of s_n and $s(u)$, brought to light in KNOPP's theorem mentioned in the Introduction, is reflected in the conclusions of Propositions II, II′, and it can be further elaborated as follows.

If $\bar{C}_\infty, \underline{C}_\infty$ are finite, then

for s_n, $\limsup_{x\to 1-0} A(x) = \bar{C}_\infty$, $\liminf_{x\to 1-0} A(x) = \underline{C}_\infty$ ([11], Theorem 1 (c)),

where $A(x)\equiv A(x; s_n)$ *is defined by* (3a), *while*

for $s(u)$, $\limsup_{y\to+0} A^r(y) = \bar{C}_\infty$, $\liminf_{y\to+0} A^r(y) = \underline{C}_\infty$, $r \geqq r_0 > 0$ ([10], Theorem 1_σ),

where $A^r(y)$ *is defined as in* (13).

Proposition III. *If* s_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ *is a sequence bounded below and summable* (A) *to* l, *and if* $g(t)$ *is Riemann-integrable over* $0\leq t\leq 1$, *then*

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)\sum_{n=0}^\infty s_n x^n g(x^n) = l\int_0^1 g(t)\,dt.$$

In particular, by a special choice of $g(t)$, *we infer that* s_n *is summable* $(C, 1)$ *to* l.

Proposition III′. *If* $s(u)$ *is bounded below, Riemann-integrable in every finite interval of* $u\geqq 0$, *and summable* (A) *to* l, *and if* $g(t)$ *is Riemann-integrable over* $0\leq t\leq 1$, *then*

$$\lim_{y\to+0} y\int_0^\infty e^{-yu} g(e^{-yu})\, s(u)\, du = l\int_0^1 g(t)\,dt,$$

the integral existing in the Cauchy-Riemann sense for $y>0$.

A particular case of the conclusion, corresponding to a particular choice of $g(t)$, *is that* $s(u)$ *is summable* $(C, 1)$ *to* l.

KARAMATA has proved both Proposition III [3] and Proposition III′ ([4], Hauptsatz 1 with $L(x)\equiv 1$, $\sigma=1$ and Satz 1 as a particular case).

3. Main theorems

Theorem 1. *If, for an* $r_0 \geqq 0$, *the sequence* s_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *is summable* (σ, r_0+1) *to* l, *i.e.*

(17) $\qquad \sigma_n^{r_0+1}$, *defined as in* (6), *tends to* l *as* $n \to \infty$,

then, for any function $f(t)$ *of bounded variation over* $0 \leqq t \leqq 1$ *and* $r \geqq r_0$ [4]),

$$(18) \qquad y \sum_0^\infty e^{-yn} f(e^{-yn})\, \sigma_n^r \begin{cases} \text{converges for } y > 0, \\ \text{tends to } l \int_0^1 f(t)\, dt \text{ as } y \to +0. \end{cases}$$

Proof. It suffices to prove (18) for $r = r_0$ since afterwards we can change r_0 to $r_0 + \delta$, $\delta > 0$, in (17) and repeat our proof. Also we need prove (18) only for $f(t)$ which is positive monotonic increasing and bounded over $0 \leqq t \leqq 1$ since the given $f(t)$ can be expressed as the difference of two functions each with the property last stated. In other words, we can simplify the condition assumed on $f(t)$ so that $e^{-u} f(e^{-u})$ behaves exactly like the $\psi(u)$ of (7).

Now it is well known that, for $r_0 \geqq 0$,

$$(19) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} H_\nu^{r_0} = H_n^{r_0+1}, \\ \dfrac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} C_\nu^{r_0} = \dfrac{1}{r_0+1} C_n^{r_0+1} + \dfrac{r_0}{r_0+1} \left(\dfrac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} C_\nu^{r_0+1} \right) [5]). \end{cases}$$

Consequently (17) implies (in fact, is equivalent to) the summability $(C, 1)$ of $\sigma_n^{r_0}$ to l. Hence the conclusion (18) follows at once from Proposition I with

$$a_n = \sigma_n^{r_0}, \qquad \psi(u) = e^{-u} f(e^{-u}).$$

Corollary 1. *On the hypothesis* (17), *we have also the following conclusion more general than* (18): *for* $r \geqq r_0$,

$$y \sum_0^\infty \psi(yn)\, f\{\varphi(yn)\}\, \sigma_n^r \begin{cases} \text{converges for } y > 0, \\ \text{tends to } l \int_0^1 f(t)\, dt \text{ as } y \to +0, \end{cases}$$

where $\psi(u)$ *is subject to* (7) *and* $\varphi(u)$ *is defined:*

$$\varphi(u) \equiv \int_u^\infty \psi(x)\, dx, \qquad \varphi(0) = 1.$$

To pass from the proof of Theorem 1 to that of Corollary 1, we have only to replace $e^{-u} f(e^{-u})$ in the former by $\psi(u) f\{\varphi(u)\}$.

[4]) For $r \geqq r_0 + 1$, (18) and the similar conclusions of Theorem 1′ and Corollaries 1, 1′ are trivial.

[5]) This relation is known to be true for $\Re(r_0) > 0$ ([5], relation (4.1)).

The functional analogues of Theorem 1 and Corollary 1, stated below, are proved like them, but by using the functional analogue of (19) and Proposition I′ instead of (19) and Proposition I.

Theorem 1′. *If, for an* $r_0 \geqq 0$, $s(u)$ *defined as in* § 1 *is summable* (σ, r_0+1) *to* l, *i.e.*

$$\sigma^{r_0+1}(u), \text{ defined as in (6′), tends to } l \text{ as } u \to \infty,$$

and if, $f(t)$ *is of bounded variation over* $0 \leqq t \leqq 1$, *then, for* $r \geqq r_0$,

$$y \int_0^\infty e^{-yu} f(e^{-yu})\, \sigma^r(u)\, du \begin{cases} \text{exists as a Cauchy-Lebesgue integral if } y>0, \\ \text{tends to } l \int_0^1 f(t)\, dt \quad \text{as} \quad y \to +0. \end{cases}$$

Corollary 1′. *In Theorem* 1′,

$y \int_0^\infty e^{-yu} f(e^{-yu})\, \sigma^r(u)\, du$ *can be replaced by* $y \int_0^\infty \psi(yu)\, f\{\varphi(yu)\}\, \sigma^r(u)\, du$

where ψ *and* φ *are defined as in Corollary* 1, *there being no other change.*

Theorem 2. *If* s_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ *is summable* (C, ∞) *to* l *according to definition* (5), *and if* $g(t)$ *is Riemann-integrable over* $0 \leqq t \leqq 1$, *then, for* $r \geqq r_0 > 0$,

$$(1-x) \sum_0^\infty x^n g(x^n)\, C_n^r \begin{cases} \text{converges absolutely for } 0<x<1, \\ \text{tends to } l \int_0^1 g(t)\, dt \text{ as } x \to 1-0. \end{cases}$$

The proof is like that of Theorem 2′ and omitted.

Theorem 2′. *If* $s(u)$ *defined as in* § 1 *is summable* (C, ∞) *to* l *according to definition* (5), *and if* $g(t)$ *is Riemann-integrable over* $0 \leqq t \leqq 1$, *then, for* $r \geqq r_0 > 0$,

$$(20) \quad y \int_0^\infty e^{-yu} g(e^{-yu})\, C^r(u)\, du \begin{cases} \text{is an absolutely convergent Riemann integral for } y>0, \\ \text{tends to } l \int_0^1 g(t)\, dt \text{ as } y \to +0. \end{cases}$$

Proof. There is an $r_0 > 0$ such that, for $r \geqq r_0$, (i) the (C, r) mean of $s(u)$ is bounded obviously, (ii) the (C, r) mean is summable (A) to l by Proposition II′. The first half of (20) follows at once from (i) and the second half from (i), (ii) together by an appeal to Proposition III′ with $C^r(u)$ in place of $s(u)$.

Some special cases. Besides the special cases of the main theorems mentioned at the outset, viz. KNOPP's and POSTNIKOV's, the following may be noticed. In Corollaries 1 and 1′, we can choose $\psi(u) = e^{-u}$ (Laplace-Abel kernel), getting Theorems 1 and 1′, or else,

$$\text{either } \psi(u) = \frac{1}{(1+u)^{\varrho+1}}, \qquad \varrho > 0 \text{ (Stieltjes kernel),}$$

$$\text{or} \qquad \psi(u) = -\frac{d}{du}\left(\frac{u}{e^u - 1}\right) \qquad \text{(Lambert kernel).}$$

Again, Theorems 2 and 2′, with the particular choices of $g(t)$ referred to in Propositions II and II′, yield the result that (C, ∞) *summability to* l, *whether for* s_n *or* $s(u)$, *implies* $(C, 1)$ *summability to* l *of the* (C, r) *mean,* $r \geqq r_0 > 0$, *or equivalently, implies* $(C, r+1)$ *summability to* l, $r \geqq r_0 > 0$. The proof of this result given here for the case of $s(u)$ appears to be the simplest possible; and a similar proof can be given for the case of s_n by first showing, adapting the arguments used for Proposition II′, that the (A) (C, r) transform or $A(x; C_v^r)$ tends to l as $x \to 1-0$, $r \geqq r_0 > 0$, which is the incomplete form of Proposition II precisely needed for our purpose. These simple proofs, however, may be said to be indirect since they involve the (A) (C, r) transform in a role analogous to that of a catalytic agent. The alternative direct proofs not depending on the (A) (C, r) transform, given by PENNINGTON and myself ([7], [10]), are in a sense laboured and less "natural"; so that LITTLEWOOD's observation in this connexion [11a], namely, that the plausibility of a direct and natural proof "seems to fade on a closer approach", has not altogether lost its force.

In conclusion, I must record my indebtedness to Professor V. GANAPATHY IYER and Professor K. KNOPP who kindly read through my original manuscript and offered various suggestions for improvement.

References

[1] FROBENIUS, G.: Über die Leibnizsche Reihe. J. reine u. angew. Math. **89**, 262—264 (1880). — [2] HARDY, G. H.: Divergent Series. Oxford 1949. — [3] KARAMATA, J.: Über die Hardy-Littlewoodschen Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes. Math. Z. **32**, 319—320 (1930). — [4] KARAMATA, J.: Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Laplacesche und Stieltjessche Transformation betreffen. J. reine u. angew. Math. **164**, 37—39 (1931). — [5] KNOPP, K.: Über eine Klasse konvergenzerhaltender Integraltransformationen und den Äquivalenzsatz der C- und H-Verfahren. Math. Z. **47**, 229—264 (1941). — [6] KNOPP, K.: Eine Bemerkung zur C_k- und A-Limitierung von Funktionen. Math. Z. **50**, 155—160 (1944). — [7] PENNINGTON, W. B.: A Tauberian theorem on the oscillation of Riesz means. J. London Math. Soc. **27**, 199—206 (1952). — [8] POSTNIKOV, A. G.: A general theorem of Abelian type for power series. Doklady Akad. Nauk SSSR., N. S. **96**, 913—916 (1954) [Russian]. — [9] RAJAGOPAL, C. T.: On Riesz summability and summability by Dirichlet's series. Amer. J. Math. **76**, 252—258 (1954). — [10] RAJAGOPAL, C. T.: Note on the oscillation of Riesz, Euler and Ingham means. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. **7**, 64—75 (1956). — [11] RAMASWAMI, V.: Some Tauberian theorems on oscillation. J. London Math. Soc. **10**, 294—308 (1935). — [11a] LITTLEWOOD, J. E.: Note on the preceding paper. J. London Math. Soc. **10**, 309—310 (1935). — [12] Sz sz, O.: Collected Mathematical Papers. Cincinnati 1955.

Ramanujan Institute of Mathematics, Madras (India)

(Eingegangen am 2. Oktober 1956)

Albrecht, R.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 320—331 (1957)

Auswahlverfahren bei linearer Limitierung

Von
Rudolf Albrecht

In einer kürzlich erschienenen Arbeit hat K. Endl Limitierungsverfahren angegeben, die die Hausdorffschen als Spezialfall enthalten[1]). Die Verallgemeinerung besteht darin, daß aus einer zu limitierenden Folge $\{s_\mu\}$ k Teilfolgen ausgewählt werden, auf die jeweils ein Hausdorff-Verfahren angewandt wird. Eine Teilfolge enthält dabei alle Glieder s_μ, deren Indizes einer Restklasse modulo k angehören.

Da einerseits das von K. Endl benützte Auswahlprinzip spezieller Natur ist, andererseits der Grundgedanke der Methode, die Matrix eines Limitierungsverfahrens aus Matrixelementen anderer Verfahren aufzubauen, allgemein angewandt werden kann, soll im folgenden auf solche Auswahlverfahren eingegangen werden, die aus abzählbar vielen beliebigen Teilverfahren erzeugt werden, von denen jedes auf eine bestimmte Teilfolge wirkt. Ein solches Verfahren hat den Vorteil, daß es der Struktur einer gegebenen Folge angepaßt werden kann. Sind die einzelnen Teilverfahren stets alle einer Klasse homologer Verfahren entnommen, so braucht das resultierende Verfahren nicht wieder zu dieser Klasse zu gehören. Infolgedessen lassen sich Klassen definieren, die die Klasse der Teilverfahren umfassen.

In § 1 und § 2 werden einige der praktisch wichtigsten Fragen für derartige Auswahlverfahren untersucht: Wie lassen sich die Verfahren konstruieren, wann sind sie konvergenzerhaltend, regulär, vertauschbar, verträglich, wann schließt ein Verfahren ein anderes ein? In § 3 werden als Anwendung Verfahren betrachtet, die aus Hausdorffschen gebildet sind. Schließlich soll an einem einfachen Beispiel die Wirkungsweise der Verfahren gezeigt werden.

§ 1. Konstruktion linearer Verfahren aus anderen

Die zu limitierende Folge sei $\{s_\mu\}$, dargestellt durch die einspaltige Matrix $\mathfrak{s} = (s_\mu)$. Die Menge der der Größe nach geordneten Indizes $\mu = 0, 1, 2, \ldots$ sei mit $\mathfrak{m}$ bezeichnet. Auf irgendeine Weise werde eine Zerlegung $\mathfrak{Z}(k)$ von $\mathfrak{m}$ in k, $k \leq \infty$, unendliche Teilmengen $\mathfrak{m}_\lambda$ vorgenommen, so daß

$$\mathfrak{m} = \bigcup \mathfrak{m}_\lambda, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, k.$$

Die Elemente von $\mathfrak{m}_\lambda$ seien mit μ_λ bezeichnet. Nach Einführung des Symbols

$$\delta_\mu^{(\lambda)} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad \mu \in \mathfrak{m}_\lambda, \\ 0 & \text{andernfalls,} \end{cases}$$

[1]) Endl, K.: Über Klassen von Limitierungsverfahren, die die Klasse der Hausdorffschen Verfahren als Spezialfall enthalten. Math. Z. 65, 113—132 (1956).

können wir

$$\mathfrak{s}_\lambda = (\delta_\mu^{(\lambda)} s_\mu)$$

setzen und haben

$$\mathfrak{s} = \sum_{\lambda=1}^{k} \mathfrak{s}_\lambda .$$

Dann ordnen wir den μ_λ eineindeutig ihre Ordnungszahlen $\varrho = \varrho(\mu_\lambda)$, $\varrho = 0, 1, 2, \ldots$, innerhalb der Menge $\mathfrak{m}_\lambda$ zu und stellen die Teilfolge $\{s_{\mu_\lambda}\}$ von $\{s_\mu\}$ durch die einspaltige Matrix

$$\mathfrak{s}_\lambda^* = (s_\varrho^{(\lambda)})$$

dar, wobei $s_{\mu_\lambda} = s_\varrho^{(\lambda)}$ gesetzt ist.

Nun soll jede der Folgen $\{s_{\mu_\lambda}\}$ einem linearen Verfahren A_λ unterworfen werden, das durch je eine Matrix $\mathfrak{A}_\lambda^* = (\alpha_{\varrho\sigma}^{(\lambda)})$ gegeben ist:

$$\mathfrak{u}_\lambda^* = \mathfrak{A}_\lambda^* \mathfrak{s}_\lambda^* \quad \text{mit} \quad \mathfrak{u}_\lambda^* = (u_\varrho^{(\lambda)}) .$$

Wir können dann aus den Matrixelementen $\alpha_{\varrho\sigma}^{(\lambda)}$ und Nullen eine Matrix $\mathfrak{A} = (a_{\mu\nu})$ aufbauen, so daß

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{A}\mathfrak{s} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{t} = (t_\mu)$$

und jedes t_μ gleich einem der $u_\varrho^{(\lambda)}$ ist. Wir treffen folgende Auswahl: Für $\mu = \mu_\lambda$ sei $t_{\mu_\lambda} = u_{\varrho(\mu_\lambda)}^{(\lambda)}$. Die Struktur der Matrix $\mathfrak{A}$ ist dann leicht ersichtlich.

Satz 1. Die Matrix $\mathfrak{A}$ ist die Summe von k Matrizen $\mathfrak{A}_\lambda = (a_{\mu\nu}^{(\lambda)})$, $\mathfrak{A} = \sum_{\lambda=1}^{k} \mathfrak{A}_\lambda$, wobei für das Matrixelement $a_{\mu\nu}^{(\lambda)}$ gilt

$$a_{\mu\nu}^{(\lambda)} = \begin{cases} \alpha_{\varrho(\mu_\lambda),\sigma(\nu_\lambda)}^{(\lambda)} & \text{falls } \mu = \mu_\lambda, \nu = \nu_\lambda; \mu_\lambda, \nu_\lambda \in \mathfrak{m}_\lambda; \\ 0 & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Beweis. Für die so gebildeten Matrizen $\mathfrak{A}_\lambda$ gilt

$$\left(\sum_{\lambda=1}^{k} \mathfrak{A}_\lambda\right)\mathfrak{s} = \sum_{\lambda=1}^{k} \mathfrak{A}_\lambda \mathfrak{s} .$$

Die einspaltige Matrix $\mathfrak{A}_\lambda \mathfrak{s}$ hat in den Zeilen $\mu \notin \mathfrak{m}_\lambda$ nur Nullen, in den Zeilen $\mu = \mu_\lambda$ stehen die Elemente

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} a_{\mu_\lambda \tau} s_\tau = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \alpha_{\varrho(\mu_\lambda),\sigma(\nu_\lambda)}^{(\lambda)} s_{\nu_\lambda} = u_{\varrho(\mu_\lambda)}^{(\lambda)} .$$

Das gleiche Ergebnis kommt, wenn $\mathfrak{s}$ durch $\mathfrak{s}_\lambda$ ersetzt wird: $\mathfrak{A}_\lambda \mathfrak{s}_\lambda = \mathfrak{A}_\lambda \mathfrak{s}$. Durch Addition erhalten wir

$$\mathfrak{t} = \sum_{\lambda=1}^{k} \mathfrak{A}_\lambda \mathfrak{s}_\lambda = \left(\sum_{\lambda=1}^{k} \mathfrak{A}_\lambda\right)\mathfrak{s} = \mathfrak{A}\mathfrak{s} .$$

$\mathfrak{A}$ ist die einzige Matrix der gesuchten Art, denn aus

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{A}\mathfrak{s}, \quad \mathfrak{t} = \mathfrak{A}'\mathfrak{s}$$

folgt

$$(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}')\mathfrak{s} = 0$$

und weil $\mathfrak{s}$ beliebig sein kann, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$.

Die Matrizen $\mathfrak{A}_\lambda$ und $\mathfrak{s}_\lambda$ sind so konstruiert, daß für sie folgende „Orthogonalitätseigenschaft“ gilt:

Satz 2[2]). Für $\lambda \neq \lambda'$ ist $\widetilde{\mathfrak{A}}_\lambda \mathfrak{A}_{\lambda'} = \mathfrak{A}_\lambda \mathfrak{A}_{\lambda'} = 0$, $\tilde{\mathfrak{s}}_\lambda \mathfrak{s}_{\lambda'} = 0$.

Beweis. Das μ, ν-Element der Produktmatrix $\mathfrak{A}_\lambda \mathfrak{A}_{\lambda'}$ ist

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} a_{\mu\tau}^{(\lambda)} a_{\tau\nu}^{(\lambda')} = 0,$$

da $a_{\tau\nu}^{(\lambda')} = 0$ für $\tau \in \mathfrak{m}_\lambda$, $a_{\mu\tau}^{(\lambda)} = 0$ für $\tau \in \mathfrak{m}_{\lambda'}$ und $a_{\mu\tau}^{(\lambda)} = a_{\tau\nu}^{(\lambda')} = 0$ für $\tau \notin \mathfrak{m}_\lambda, \mathfrak{m}_{\lambda'}$ ist. Entsprechend gilt $\widetilde{\mathfrak{A}}_\lambda \mathfrak{A}_{\lambda'} = 0$ und $\tilde{\mathfrak{s}}_\lambda \mathfrak{s}_{\lambda'} = \sum_{\tau=0}^{\infty} s_\tau^2 \delta_\tau^{(\lambda)} \delta_\tau^{(\lambda')} = 0$.

Soll umgekehrt $\mathfrak{A}_\lambda$ bzw. $\mathfrak{s}_\lambda$ aus $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{s}$ erhalten werden, so muß $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{s}$ mit der Matrix

$$\mathfrak{E}_\lambda = (e_{\mu\nu}^{(\lambda)}), \qquad e_{\mu\nu}^{(\lambda)} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad \mu = \nu = \mu_\lambda \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

multipliziert werden.

Bei gegebener Zerlegung $\mathfrak{Z}(k)$ können wir demnach das durch die Matrix $\mathfrak{A}$ bestimmte Verfahren A symbolisch als Summe der Teilverfahren A_λ schreiben:

$$A = \sum_{\lambda=1}^{k} A_\lambda.$$

Die Verfahren A_λ können aus Klassen $\mathfrak{M}_\lambda$ üblicher bekannter Verfahren entnommen sein. Es ist aber auch sinnvoll, sie in allgemeinerer Weise aus solchen zu bilden: Ist $(c_{\varkappa\sigma}^{(\lambda)})$ die Matrix eines Verfahrens aus $\mathfrak{M}_\lambda$, so kann eine Matrix $\mathfrak{A}_\lambda^* = (\alpha_{\varrho\sigma}^{(\lambda)})$ hergestellt werden, indem man *irgendeinen* Isomorphismus zwischen der Menge der Indizes ϱ und einer Teilmenge der Menge der Indizes $\varkappa$ wählt, so daß *jedem* ϱ *ein* $\varkappa$ zugeordnet ist, und man als ϱ-te Zeile von $(\alpha_{\varrho\sigma}^{(\lambda)})$ die $\varkappa$-te Zeile von $(c_{\varkappa\sigma}^{(\lambda)})$ nimmt, wenn $\varkappa$ die ϱ zugeordnete Zahl ist.

K. ENDL wählt z.B. für jedes λ für $\mathfrak{M}_\lambda$ die Klasse der Hausdorff-Verfahren, endliches k, eine Zerlegung $\mathfrak{Z}(k)$ der Indexmenge $\mathfrak{m}$ nach Restklassen modulo k und den Isomorphismus $\varrho = \varkappa$. Für $k = \infty$ und einen anderen Isomorphismus wird am Ende von § 3 ein Beispiel angegeben.

Schließlich ist zu bemerken, daß die Matrix eines Verfahrens A_λ auch aus den Matrizen mehrerer Verfahren gebildet werden kann, indem aus jeder dieser Matrizen eine Anzahl von Zeilen zur Konstruktion der Matrix von A_λ entnommen wird. Wir erläutern dies an einem einfachen Beispiel. Wir wählen $k = 1$, als zu limitierende Folge die Funktionenfolge $\{z^\mu\}$ und wollen diese einer regulären Transformation unterwerfen, deren Matrix aus den Matrixelementen ∞ vieler bekannter Verfahren, nämlich (E, q)-Verfahren, gebildet ist. Die Matrix eines (E, q)-Verfahrens ist bekanntlich

$$\left(\frac{\binom{\varrho}{\sigma} q^{-\sigma}}{(1+q^{-1})^\varrho} \right).$$

[2]) $\widetilde{\mathfrak{A}}$ soll die transponierte Matrix von $\mathfrak{A}$ bezeichnen.

Aus jeder der ∞ vielen Matrizen für $q=0, 1, 2, \ldots$ [3]) entnehmen wir jeweils eine Zeile für die neue Matrix

$$\left(\begin{matrix} \binom{\mu^2}{\nu} \mu^{-\nu} \\ (1+\mu^{-1})^{\mu^2} \end{matrix} \right),$$

indem wir $\varrho=\mu^2$, $\nu=\sigma$, $q=\mu$ setzen. Man erkennt leicht, daß das zugehörige Verfahren regulär ist, denn die Summe der Elemente einer Zeile der Matrix ist stets 1, der Limes der Elemente jeder Spalte ist null. Aus

$$t_\mu = \frac{\sum_{\nu=0}^{\mu^2} \binom{\mu^2}{\nu} \left(\frac{z}{\mu}\right)^\nu}{(1+\mu^{-1})^{\mu^2}} = \left(\frac{\mu+z}{\mu+1}\right)^{\mu^2}$$

ersieht man, daß die Folge $\{z^\mu\}$ in der Halbebene $\Re z<1$ vom erhaltenen Verfahren zu null limitiert wird, was keines der (E, q)-Verfahren leistet.

§ 2. Einige Sätze über Auswahlverfahren

Die bisherigen Betrachtungen waren rein formaler Art. Jetzt sollen einige Sätze angegeben werden, die Konvergenz, Regularität, Vertauschbarkeit, Verträglichkeit und Inklusionseigenschaften der zu einer Zerlegung $\mathfrak{Z}(k)$ gehörigen Verfahren $A=\sum_{\lambda=1}^{k} A_\lambda$ in Abhängigkeit vom Verhalten der Verfahren A_λ betreffen.

Wird die Folge $\{s_\mu\}$ durch A zum Wert t limitiert, dann ist klar, daß auch die Teilfolge $\{s_{\mu_\lambda}\}$ von A_λ zu t limitiert wird. Wird andererseits $\{s_{\mu_\lambda}\}$ von A_λ zu t limitiert, so kann $\{s_\mu\}$ durch A nicht zu $t' \neq t$ limitiert werden. Die Konvergenzfrage behandelt

Satz 3. Notwendig und hinreichend, damit eine Folge $\{s_\mu\}$ vom Verfahren $A=\sum_{\lambda=1}^{k} A_\lambda$ zu einem Wert t limitiert wird, ist es, daß für jeden Wert λ; $\lambda=1, 2, \ldots, k$;

(a) die Teilfolge $\{s_{\mu_\lambda}\}$ vom Teilverfahren A_λ zum Wert t limitiert wird,

(b) zu jedem Wert $\varepsilon>0$ eine von λ unabhängige Zahl M existiert, so daß $|t-t_{\mu_\lambda}|<\varepsilon$ für $\mu_\lambda>M$ ist. Ist k endlich, so entfällt (b).

Die Bedingungen sind notwendig: Gilt $t_\mu \to t$, so muß jede Teilfolge der Folge $\{t_\mu\}$ gegen t konvergieren, insbesondere jede Teilfolge $\{t_{\mu_\lambda}\}$. Wäre für Werte μ_λ Bedingung (b) nicht erfüllt, so kann auch die Konvergenzbedingung $|t-t_\mu|<\varepsilon$ für $\mu>M$ nicht gelten, da diese Werte μ_λ in der Folge der μ-Werte auftreten. Die Bedingungen sind hinreichend, da jeder der μ-Werte einem der μ_λ-Werte gleich ist und nach (b) deshalb $\{t_\mu\}$ gegen t konvergiert.

[3]) Für $q=0$ soll die Einheitsmatrix dargestellt werden.

Ist k endlich, so folgt aus der Konvergenz der Teilfolgen $|t-t_{\mu_\lambda}|<\varepsilon$ für $\mu_\lambda>M_\lambda$ die Konvergenz der Folge:

$$|t-t_\mu|<\varepsilon \quad \text{für } \mu>\operatorname{Max} M_\lambda.$$

Soll ein Verfahren A regulär sein, so genügt es nicht, daß die Teilverfahren A_λ regulär sind. Ist z.B. $k=\infty$ und hat $\mathfrak{A}_\lambda^*=(\alpha_{\varrho\sigma}^{(\lambda)})$ die Struktur

$$\alpha_{\varrho\sigma}^{(\lambda)}=\begin{cases}0 & \text{für } \varrho\neq\sigma,\\ 1 & \text{für } \varrho=\sigma,\ \varrho>0,\\ \lambda & \text{für } \varrho=\sigma=0,\end{cases}$$

so sind die Verfahren A_λ gewiß regulär, die zum Verfahren $A=\sum_{\lambda=1}^{\infty}A_\lambda$ gehörige Matrix $\mathfrak{A}=(a_{\mu\nu})$ erfüllt jedoch die Toeplitzschen notwendigen und hinreichenden Bedingungen für Regularität nicht: es gibt nicht beschränkte Werte von μ, so daß

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{\mu\nu}|=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{\mu\nu}=\lambda$$

ist, wobei λ mit μ gegen ∞ geht.

Satz 4. Ein Verfahren $A=\sum_{\lambda=1}^{k}A_\lambda$ ist genau dann regulär, wenn

(a) jedes Verfahren A_λ regulär ist,

(b) $\sum_{\sigma=0}^{\infty}|\alpha_{\varrho\sigma}^{(\lambda)}|<K$ und K unabhängig von ϱ *und* λ ist und $\left|\sum_{\sigma=0}^{\infty}\alpha_{\varrho\sigma}^{(\lambda)}-1\right|<\varepsilon$ für $\mu_\lambda>M$ mit von λ unabhängigem M gilt. Dabei bedeutet $\alpha_{\varrho\sigma}^{(\lambda)}$ das Matrixelement der zum Verfahren A_λ gehörigen Matrix $\mathfrak{A}_\lambda^*$. Ist k endlich, so entfällt (b).

Zum Beweis zeigen wir, daß für die Matrix $\mathfrak{A}=(a_{\mu\nu})$ des Verfahrens A die Toeplitzschen Bedingungen erfüllt sind: In jeder Spalte von $\mathfrak{A}$ stehen die Elemente einer Spalte einer Matrix $(\alpha_{\varrho\sigma}^{(\lambda)})$ und Nullen. Infolge der Regularität von A_λ gilt also für festes ν $a_{\mu\nu}\to 0$ für $\mu\to\infty$. In jeder Zeile von $\mathfrak{A}$ stehen die Elemente einer Zeile einer Matrix $(\alpha_{\varrho\sigma}^{(\lambda)})$ und Nullen. Infolge (b) ist für $\mu=\mu_\lambda$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{\mu_\lambda\nu}|=\sum_{\sigma=0}^{\infty}|\alpha_{\varrho(\mu_\lambda),\sigma}^{(\lambda)}|<K$$

unabhängig von μ_λ,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{\mu_\lambda\nu}=\sum_{\sigma=0}^{\infty}\alpha_{\varrho(\mu_\lambda),\sigma}^{(\lambda)}\to 1 \qquad \text{für } \mu_\lambda\to\infty$$

gleichmäßig bezüglich λ.

Ist k endlich, so folgt aus der Regularität der Verfahren A_λ

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty}|\alpha_{\varrho\sigma}^{(\lambda)}|<K_\lambda, \qquad \left|\sum_{\varrho=0}^{\infty}\alpha_{\varrho\sigma}^{(\lambda)}-1\right|<\varepsilon \quad \text{für} \quad \mu_\lambda>M_\lambda.$$

Dann ist (b) stets zu erfüllen, indem man $K=\operatorname{Max} K_\lambda$, $M=\operatorname{Max} M_\lambda$ setzt.

Die Notwendigkeit von (a) und (b) folgt aus der Notwendigkeit der Toeplitzschen Bedingungen.

Aus den Toeplitz-Schurschen Bedingungen erhält man weiter

Satz 5. Für $k \geqq 2$ limitiert jedes konvergenzerhaltende Verfahren $A = \sum_{\lambda=1}^{k} A_\lambda$ mit der Matrix $\mathfrak{A} = (a_{\mu\nu})$ jede konvergente Folge $\{s_\mu\}$, $s_\mu \to s$, zum Wert cs mit

$$c = \lim_{\mu\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} = \lim_{\varrho\to\infty} \sum_{\sigma=0}^{\infty} \alpha_{\varrho\sigma}^{(\lambda)}, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, k.$$

Beweis. Für $k \geqq 2$ enthält jede Spalte der Matrix $\mathfrak{A}$ unendlich viele Nullen. Da die Folge der Elemente jeder Spalte konvergieren muß, wenn A konvergenzerhaltend ist, muß also $\lim_{\mu\to\infty} a_{\mu\nu} = 0$ sein. Bekanntlich limitiert ein konvergenzerhaltendes Verfahren eine konvergente Folge mit dem Grenzwert s zum Wert

$$s \lim_{\mu\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \lim_{\mu\to\infty} a_{\mu\nu}(s_\nu - s).$$

Wegen $\lim_{\mu\to\infty} a_{\mu\nu} = 0$ folgt daraus der erste Teil der Behauptung. Da $\lim_{\mu\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}$ existiert und für $\mu = \mu_\lambda$ $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu_\lambda \nu} = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \alpha_{\varrho(\mu_\lambda),\sigma}^{(\lambda)}$ ist, ist $\lim_{\mu\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} = \lim_{\varrho\to\infty} \sum_{\sigma=0}^{\infty} \alpha_{\varrho\sigma}^{(\lambda)}$ für jedes λ.

Satz 6. Ein Verfahren $A = \sum_{\lambda=1}^{k} A_\lambda$, $k \geqq 2$, ist genau dann konvergenzerhaltend, wenn

(a) jedes Verfahren A_λ jede konvergente Folge $\{s_{\mu_\lambda}\}$, $s_{\mu_\lambda} \to s$, zum Wert cs limitiert, wobei c eine von λ unabhängige Konstante ist,

(b) $\sum_{\sigma=0}^{\infty} |\alpha_{\varrho\sigma}^{(\lambda)}| < K$ und K unabhängig von ϱ *und* λ ist und $\left| \sum_{\sigma=0}^{\infty} \alpha_{\varrho\sigma}^{(\lambda)} - c \right| < \varepsilon$ für $\mu_\lambda > M$ mit von λ unabhängigem M gilt. Bei endlichem k entfällt (b).

Nach Satz 5 gibt es für $k \geqq 2$ kein konvergenzerhaltendes Verfahren A, das eine nach s konvergente Folge nicht zu einem Wert cs limitieren würde. Daraus folgt die Notwendigkeit von (a). Im übrigen ist Satz 6 wie Satz 4 zu beweisen, wobei

$$\lim_{\mu\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} = \lim_{\varrho\to\infty} \sum_{\sigma=0}^{\infty} \alpha_{\varrho\sigma}^{(\lambda)} = c$$

ist für jedes λ.

Satz 7. Ist $k \geqq 2$ und limitiert ein Verfahren $A = \sum_{\lambda=1}^{k} A_\lambda$ jede beschränkte Folge, so kann der Limes nur null sein.

Beweis. Wie für Satz 5 folgt, daß $\lim_{\mu\to\infty} a_{\mu\nu} = 0$ ist. Da bekanntlich jedes Verfahren, das jede beschränkte Folge $\{s_\mu\}$ limitiert, diese zum Wert $\sum_{\nu=0}^{\infty} \lim_{\mu\to\infty} a_{\mu\nu} s_\nu$ limitiert, erhält man obige Behauptung.

Im folgenden seien $A=\sum_{\lambda=1}^{k} A_\lambda$, $B=\sum_{\lambda=1}^{k} B_\lambda$ zwei Verfahren, die zur selben Zerlegung $\mathfrak{Z}(k)$ gehören. Dann gelten

Satz 8. Zwei Verfahren A, B sind genau dann vertauschbar, wenn die zu gleichem λ gehörigen Teilverfahren A_λ, B_λ vertauschbar sind.

Die Bedingungen sind hinreichend: Ist $\mathfrak{A}_\lambda$ bzw. $\mathfrak{B}_\lambda$ die zur Matrix von A_λ bzw. B_λ nach § 1 gehörige Übermatrix, so daß $\mathfrak{A}=\sum_{\lambda=1}^{k}\mathfrak{A}_\lambda$, $\mathfrak{B}=\sum_{\lambda=1}^{k}\mathfrak{B}_\lambda$ ist, so muß bei Vertauschbarkeit $\mathfrak{A}\mathfrak{B}=\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ sein. Nach Satz 2 ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}=\sum_{\lambda=1}^{k}\mathfrak{A}_\lambda\sum_{\lambda=1}^{k}\mathfrak{B}_\lambda=\sum_{\lambda=1}^{k}\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{B}_\lambda.$$

Da jedes Verfahren A_λ mit B_λ vertauschbar ist, gilt

$$\sum_{\lambda=1}^{k}\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{B}_\lambda=\sum_{\lambda=1}^{k}\mathfrak{B}_\lambda\mathfrak{A}_\lambda=\mathfrak{B}\mathfrak{A}.$$

Ist für ein λ $\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{B}_\lambda\neq\mathfrak{B}_\lambda\mathfrak{A}_\lambda$, so kann nicht wie vorher $\sum_{\lambda=1}^{k}\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{B}_\lambda=\sum_{\lambda=1}^{k}\mathfrak{B}_\lambda\mathfrak{A}_\lambda$ sein, weil die $\mathfrak{m}_\lambda$ elementenfremd sind.

Satz 9. Zwei Verfahren A, B sind verträglich, wenn für ein λ die Teilverfahren A_λ und B_λ verträglich sind.

Zwei Verfahren heißen verträglich, wenn für jede Folge $\{s_\mu\}$, für die $s_\mu\to t(A)$, $s_\mu\to t'(B)$ gilt, $t=t'$ ist. Ist also für die betrachteten Verfahren A, B $s_\mu\to t(A)$, $s_\mu\to t'(B)$ und für *ein* λ $s_{\mu_\lambda}\to t(A_\lambda)$, $s_{\mu_\lambda}\to t(B_\lambda)$, so muß $t=t'$ sein.

Satz 10. Ein Verfahren A schließt nur dann ein nicht nur zu null limitierendes Verfahren B ein, wenn für jedes λ das Verfahren A_λ das Verfahren B_λ einschließt.

Beweis. B möge eine Folge $\{s_\mu\}$ zum Wert $t\neq 0$ limitieren: $s_\mu\to t(B)$. Für $\lambda=\lambda'$ soll $A_{\lambda'}B_{\lambda'}$ *nicht* einschließen, d.h. es gibt eine Folge $\{s'_\varrho\}$, so daß $s'_\varrho\to t'(B_{\lambda'})$, aber *nicht* $s'_\varrho\to t'(A_{\lambda'})$.

Wir ersetzen die Glieder $s_{\mu_{\lambda'}}$ von $\{s_\mu\}$ durch

$$s^*_{\mu_{\lambda'}}=\frac{s'_\varrho t}{t'}\qquad\text{falls } t'\neq 0.$$

Für die so erhaltene Folge $\{s^*_\mu\}$ gilt ebenfalls $s^*_\mu\to t(B)$, aber *nicht* $s^*_\mu\to t(A)$. Ist $t'=0$, so setzen wir alle Glieder $s_\mu=0$, falls $\mu\neq\mu_{\lambda'}$, die Glieder $s_{\mu_{\lambda'}}=s'_\varrho$. Für die so konstruierte Folge $\{s^*_\mu\}$ gilt $s^*_\mu\to 0(B)$, aber *nicht* $s^*_\mu\to 0(A)$.

Korollar. Ein Verfahren A ist nur dann äquivalent einem Verfahren B, wenn für jedes λ das Verfahren A_λ dem Verfahren B_λ äquivalent ist.

Dies folgt aus der Äquivalenzdefinition und aus Satz 10.

Bei Einschränkung der Voraussetzungen läßt sich entsprechend mehr aussagen.

Satz 11. Ist k endlich, so schließt das Verfahren A genau dann das Verfahren B ein, wenn für jedes λ das Verfahren A_λ das Verfahren B_λ einschließt.

Die Bedingung ist notwendig nach Satz 10. Gilt für eine Folge $\{s_\mu\}$ $s_\mu \to t(B)$, so ist auch $s_{\mu_\lambda} \to t(B_\lambda)$ für jedes λ. A_λ schließt B_λ ein, also ist $s_{\mu_\lambda} \to t(A_\lambda)$. Aus Satz 3 folgt deshalb $s_\mu \to t(A)$.

Korollar. Bei endlichem k ist das Verfahren A genau dann äquivalent dem Verfahren B, wenn für jedes λ das Verfahren A_λ äquivalent dem Verfahren B_λ ist.

Schließlich sei noch eine Bemerkung angegeben, die sich auf die Untersuchung von Limitierungsgebieten bei Auswahlverfahren $A = \sum_{\lambda=1}^{k} A_\lambda$ bezieht. Die Glieder der zu limitierenden Folge seien nun Funktionen einer komplexen Veränderlichen z: $s_\mu = \varphi_\mu(z)$. Jedes der k Teilverfahren A_λ wirke auf eine Teilfolge $\{\varphi_{\mu_\lambda}(z)\}$ und limitiere sie in einem gewissen Gebiet G_λ der z-Ebene zu ein und derselben Funktion $\varphi(z)$, $\varphi(z) \neq \infty$, dagegen in keinem äußeren Punkt dieses Gebietes. Dann limitiert ein Verfahren $A = \sum_{\lambda=1}^{k} A_\lambda$ die Folge $\{\varphi_\mu(z)\}$ in keinem äußerem Punkt von $G = \cap G_\lambda$ zu $\varphi(z)$. Bei endlichem k wird $\{\varphi_\mu(z)\}$ in jedem inneren Punkt von G zu $\varphi(z)$ limitiert. Letzteres folgt aus Satz 3.

Sind die Gebiete G_λ die durch die Funktion $z = \psi(\zeta)$ vermittelten Bilder von (eventuell mehrblättrigen) Gebieten G_λ^* der komplexen ζ-Ebene, so gilt obige Aussage entsprechend für die Folge $\{\varphi_\mu[\psi(\zeta)]\}$ mit den Gebieten G_λ^*. Diese selbstverständliche Tatsache kann bei Auswahlverfahren nützlich verwendet werden. Besonders einfache Verhältnisse ergeben sich für die geometrische Reihe bzw. die Funktionenfolge $\{z^\mu\}$, die häufig zu Wirkfelduntersuchungen herangezogen wird. Man bestimmt dabei das Gebiet, in dem $\{z^\mu\}$ zu null limitiert wird. Wir zeigen dies an einem einfachen Beispiel:

$\{z^\mu\}$ werde in die beiden Teilfolgen $\{z^{2\sigma}\}$, $\{z^{2\sigma+1}\}$ zerlegt, $\sigma = 0, 1, 2, \ldots$. Auf die erste und auf die zweite wird jeweils das gleiche Verfahren, nämlich ein Borel-Verfahren mit der Matrix $(\alpha_{\varrho\sigma})$

$$\alpha_{\varrho\sigma} = \frac{e^{-\varrho}\varrho^\sigma}{\sigma!}$$

angewandt. Es ist also $A_1 = A_2$. Wir setzen $z = \zeta^{\frac{1}{2}}$. Die Folge $\{\zeta^\sigma\}$ und ebenso die Folge $\{\zeta^{\sigma+\frac{1}{2}}\}$ werden im Gebiet $\Re\zeta < 1$ zu null limitiert, für $\Re\zeta > 1$ nicht. Das resultierende Verfahren $A = A_1 + A_2$ limitiert die Folge $\{\zeta^{\mu/2}\}$ also im Gebiet G^*, der Halbebene $\Re\zeta < 1$ zu null, die Folge $\{z^\mu\}$ demnach in jedem inneren und in keinem äußeren Punkt des durch $\Re z^2 < 1$ gegebenen Gebietes G der z-Ebene. Das Verfahren A ist mit keinem Borel-Verfahren vergleichbar, denn es summiert die geometrische Reihe für Werte z mit $\Re z > 1$ und G ist im Gegensatz zu jedem Borel-Polygon nicht konvex.

Ein anderes Beispiel dieser Art ist die Summierung der geometrischen Reihe in Cassinischen Ovalen nach K. Endl[1]), wobei die Teilverfahren Hausdorffsche sind.

§ 3. Konstruktion von Verfahren aus Hausdorff-Verfahren

Die Matrix einer Hausdorff-Transformation hat bekanntlich die Gestalt

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{D}\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{D}.$$

$\mathfrak{M}$ ist eine Diagonalmatrix, $\mathfrak{D}$ die Differenzenmatrix

$$\left((-1)^{\sigma}\binom{\varkappa}{\sigma}\right)$$

mit $\mathfrak{D}^2 = \mathfrak{E}$ ($\mathfrak{E}$ Einheitsmatrix). Wir wollen aus Hausdorff-Verfahren nach § 1 neue Verfahren bilden. Wir wählen eine Zerlegung $\mathfrak{Z}(k)$ der Indexmenge $\mathfrak{m}$ in k Teilmengen $\mathfrak{m}_\lambda$ ($\mu \in \mathfrak{m}$, $\mu_\lambda \in \mathfrak{m}_\lambda$), zu jeder Teilmenge $\mathfrak{m}_\lambda$ ein Hausdorff-Verfahren H_λ mit der Matrix

$$\mathfrak{D}\,\mathfrak{M}_\lambda^*\,\mathfrak{D} = (h_{\varkappa\sigma}^{(\lambda)})$$

und einen Isomorphismus

$$I_\lambda: \quad \varrho \leftrightarrow \varkappa(\varrho).$$

Damit erhalten wir Teilverfahren A_λ mit den Matrizen

$$\mathfrak{A}_\lambda^* = (\alpha_{\varrho\sigma}^{(\lambda)}) \qquad \text{mit} \qquad \alpha_{\varrho\sigma}^{(\lambda)} = h_{\varkappa(\varrho),\sigma}^{(\lambda)}$$

und die Matrizen

$$\mathfrak{A}_\lambda = (a_{\mu\nu}^{(\lambda)})$$

mit

$$a_{\mu\nu}^{(\lambda)} = \begin{cases} \alpha_{\varrho(\mu_\lambda),\sigma(\nu_\lambda)}^{(\lambda)} & \text{falls } \mu = \mu_\lambda,\ \nu = \nu_\lambda;\ \mu_\lambda, \nu_\lambda \in \mathfrak{m}_\lambda; \\ 0 & \text{andernfalls,} \end{cases}$$

wobei $\varrho(\mu_\lambda)$ bzw. $\sigma(\nu_\lambda)$ die Ordnungszahl von μ_λ bzw. ν_λ sei. Die Matrix des resultierenden Verfahrens A ist dann

$$\mathfrak{A} = \sum_{\lambda=1}^{k} \mathfrak{A}_\lambda.$$

Aus der Konstruktion erkennt man folgende Eigenschaften der Verfahren A_λ: Ein Verfahren A_λ ist konvergenzerhaltend bzw. regulär, wenn das Verfahren H_λ konvergenzerhaltend bzw. regulär ist. Dies folgt wieder aus der Tatsache, daß jede Teilfolge einer konvergenten Folge zum Grenzwert der Folge konvergiert.

Bekanntlich ist eine reelle Hausdorff-Transformation H_λ genau dann konvergenzerhaltend, wenn die Folge $\{m_\varkappa^{(\lambda)}\}$ der Diagonalelemente der Matrix $\mathfrak{M}_\lambda^*$ Differenz zweier total monotoner Folgen ist und genau dann regulär, wenn hierzu noch die Bedingungen

$$\lim_{\varkappa\to\infty} \Delta^\varkappa\, m_0^{(\lambda)} = 0, \qquad m_0^{(\lambda)} = 1$$

genommen werden. Im ersten Fall sind dann die $m_\varkappa^{(\lambda)}$ Momentenkonstanten vom Rang $\varkappa$

$$m_\varkappa^{(\lambda)} = \int_0^1 x^\varkappa\, d\chi^{(\lambda)},$$

wobei $\chi = \chi(x)$ von beschränkter Variation ist im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$, im zweiten kommt hierzu noch die Bedingung

$$\chi(+0) = \chi(0) = 0, \quad \chi(1) = 1$$

(reguläre Momentenkonstanten). Bilden umgekehrt die $m_\varkappa^{(\lambda)}$ Momentenfolgen bzw. reguläre Momentenfolgen, so ist die zugehörige H_λ-Transformation konvergenzerhaltend bzw. regulär. In Verbindung mit den Sätzen 4 und 6 können damit Aussagen über die Regularität bzw. Konvergenzerhaltung eines Verfahrens $A = \sum_{\lambda=1}^{k} A_\lambda$ gemacht werden.

Bestehen die Isomorphismen I_λ in der Identität $\varrho = \varkappa$, so sind die Verhältnisse besonders einfach. Man kann dann

$$A_\lambda = H_\lambda,$$

$$\mathfrak{A}_\lambda^* = \mathfrak{D}\,\mathfrak{M}_\lambda^*\,\mathfrak{D}$$

und

$$\mathfrak{A}_\lambda = \mathfrak{D}_\lambda\,\mathfrak{M}_\lambda\,\mathfrak{D}_\lambda$$

setzen mit den Matrizen

$$\mathfrak{D}_\lambda = (d_{\mu\nu}^{(\lambda)}),\ d_{\mu\nu}^{(\lambda)} = \begin{cases} (-1)^{\sigma(\nu_\lambda)} \binom{\varrho(\mu_\lambda)}{\sigma(\nu_\lambda)} & \text{falls } \mu = \mu_\lambda, \nu = \nu_\lambda;\ \mu_\lambda, \nu_\lambda \in \mathfrak{m}_\lambda; \\ 0 & \text{andernfalls,} \end{cases}$$

$$\mathfrak{M}_\lambda = (l_{\mu\nu}^{(\lambda)}),\ l_{\mu\nu}^{(\lambda)} = \begin{cases} m_{\varrho(\mu_\lambda)}^{(\lambda)} & \text{falls } \mu = \nu = \mu_\lambda,\ \mu_\lambda \in \mathfrak{m}_\lambda; \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

und hat

$$\mathfrak{A} = \sum_{\lambda=1}^{k} \mathfrak{D}_\lambda\,\mathfrak{M}_\lambda\,\mathfrak{D}_\lambda.$$

Wie in Satz 2 kann man zeigen, daß für $\lambda \neq \lambda'$

$$\mathfrak{D}_\lambda\,\mathfrak{D}_{\lambda'} = 0$$

und

$$\mathfrak{D}_\lambda\,\mathfrak{M}_{\lambda'} = \mathfrak{M}_{\lambda'}\,\mathfrak{D}_\lambda = 0$$

ist und weiter infolge $\mathfrak{D}^2 = \mathfrak{E}$

$$\mathfrak{D}_\lambda^2 = \mathfrak{E}_\lambda \quad \text{mit} \quad \sum_{\lambda=1}^{k} \mathfrak{E}_\lambda = \mathfrak{E}$$

gilt. Daraus folgt

Satz 12. Eine Transformation $A = \sum_{\lambda=1}^{k} H_\lambda$ hat die Matrix $\mathfrak{A} = \mathfrak{D}_0\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{D}_0$ mit $\mathfrak{D}_0 = \sum_{\lambda=1}^{k} \mathfrak{D}_\lambda$, $\mathfrak{M} = \sum_{\lambda=1}^{k} \mathfrak{M}_\lambda$, wobei $\mathfrak{D}_0^2 = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$ eine Diagonalmatrix ist.

Für endliches k können für die Transformationen $A = \sum_{\lambda=1}^{k} H_\lambda$ mit Hilfe der Ergebnisse von § 2 und der oben erwähnten Eigenschaften von reellen

Hausdorff-Transformationen eine Reihe von Sätzen angegeben werden. Zum Beispiel gilt

Satz 13. Für endliches k, $k \geqq 2$, ist ein Verfahren $A = \sum_{\lambda=1}^{k} H_\lambda$ genau dann konvergenzerhaltend bzw. regulär, wenn die zu den Hausdorff-Verfahren H_λ gehörigen Konstanten $m_\varrho^{(\lambda)}$ eine Momentenfolge bilden, für jedes λ $\lim_{\varrho\to\infty} \Delta^\varrho m_0^{(\lambda)} = 0$ und $m_0^{(\lambda)} = c$, c eine Konstante, bzw. $c = 1$ ist.

Nach Satz 6 ist bei endlichem k, $k \geqq 2$, A genau dann konvergenzerhaltend, wenn jedes Teilverfahren H_λ jede konvergente Folge $s_{\mu_\lambda} \to s$ zum Wert cs limitiert. Bekanntlich ist ein Hausdorff-Verfahren H_λ genau dann konvergenzerhaltend, wenn die $m_\varrho^{(\lambda)}$ eine Momentenfolge bilden. Ferner limitiert es zum Wert

$$m_0^{(\lambda)} s + \lim_{\varrho\to\infty} \Delta^\varrho m_0^{(\lambda)} (s_0 - s).$$

Für ein konvergenzerhaltendes bzw. reguläres Verfahren A ist deshalb

$$\lim_{\varrho\to\infty} \Delta^\varrho m_0^{(\lambda)} = 0, \qquad m_0^{(\lambda)} = c \text{ bzw. } 1$$

notwendig und hinreichend.

Weiter kann man leicht aus der Vertauschbarkeit und Verträglichkeit von Hausdorff-Verfahren H_λ auf die entsprechenden Eigenschaften für diejenigen der von uns betrachteten Verfahren schließen, die zur gleichen Zerlegung $\mathfrak{Z}(k)$ gehören. Diese und weitere hierher gehörige Sätze sollen jedoch nicht mehr formuliert werden, da sie sich für spezielle Zerlegungen $\mathfrak{Z}(k)$ bereits bei K. ENDL[1]) finden. Auch wird dort ein interessantes Beispiel für die Wirkungsweise dieser Verfahren mit endlichem k gegeben. Wir wollen statt dessen wieder zum allgemeinen Fall mit beliebigen Isomorphismen I_λ zurückkehren und noch ein einfaches Beispiel für $k = \infty$ betrachten:

Gegeben ist die Folge

$$2^0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 2^1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 2^2\ 0\ \ldots.$$

Auf $(2\tau+1)$ von null verschiedene Zahlen, von denen die $(2\tau+1)$-te 2^τ, die übrigen 1 sind, folgen $2(\tau+1)$ Nullen; $\tau = 0, 1, 2, \ldots$. Wir wollen die Folge durch ein reguläres Verfahren $A = \sum_{\lambda=1}^{\infty} A_\lambda$ limitieren.

Wir führen eine Zerlegung $\mathfrak{Z}(\infty)$ in Teilfolgen durch, indem wir aus obiger Folge die erste von null verschiedene Zahl, die erste dieser Zahl nachfolgende Null, dann wieder die erste nachfolgende von null verschiedene Zahl usw. herausgreifen, aus der verbleibenden Folge die nächste Teilfolge entsprechend bilden, jedoch mit der ersten Null beginnen, und so fortfahren. Für die λ-te Teilfolge erhält man

$$0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ \ldots \quad \text{falls } \lambda = 2\tau,$$
$$2^\tau 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ \ldots \quad \text{falls } \lambda = 2\tau + 1$$

ist. Die Matrix $\mathfrak{A}_\lambda^* = (\alpha_{\varrho\sigma}^{(\lambda)})$ des Verfahrens A_λ, das auf die λ-te Teilfolge wirkt, bilden wir aus der Dreiecksmatrix $(h_{\varkappa\sigma})$

$$h_{\varkappa\sigma} = \begin{cases} 1 & \\ 1+\varkappa & \text{falls } \sigma \leq \varkappa, \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

eines $(C, 1)$-Verfahrens. Die Isomorphismen I_λ: $\varrho \leftrightarrow \varkappa$ wählen wir so, daß

$$\begin{aligned} \varkappa &= \mu_\lambda \quad \text{für} \quad \varrho = \varrho(\mu_\lambda), \quad \text{falls} \quad \lambda = 2\tau, \\ \varkappa &= \mu_\lambda 2^\tau \quad \text{für} \quad \varrho = \varrho(\mu_\lambda), \quad \text{falls} \quad \lambda = 2\tau + 1 \end{aligned}$$

ist. $\varrho(\mu_\lambda)$ soll die Ordnungszahl von μ_λ bezeichnen. Aus der Regularität des $(C, 1)$-Verfahrens folgt die Regularität der Verfahren A_λ. Die Summe der Elemente einer Zeile ist stets 1. Also ist das resultierende Verfahren $A = \sum_{\lambda=1}^{\infty} A_\lambda$ nach Satz 4 regulär. Ferner wird jede der angegebenen Teilfolgen $(C, 1)$-limitiert zum Wert $\frac{1}{2}$. Durch die Wahl der Isomorphismen I_λ wird erreicht, daß

$$\frac{1}{2} - t_\mu = O\left(\frac{1}{\mu}\right),$$

also wird die Gesamtfolge vom Verfahren A zu $\frac{1}{2}$ limitiert. Das Verfahren A ist aus $(C, 1)$-Verfahren gebildet, die angegebene Folge ist jedoch durch kein (C, k)-Verfahren limitierbar, weil in diesem Falle

$$s_\mu = o(\mu^k)$$

sein müßte, während in unserer Folge Glieder

$$s_{2\tau^2+3\tau} = 2^\tau$$

auftreten.

Zusatz bei der Korrektur. Es sei noch bemerkt, daß die von HAUSDORFF gegebene Verallgemeinerung der nach ihm benannten Verfahren [HAUSDORFF, F.: Summationsmethoden und Momentenfolgen. II. Math. Z. **9**, 280—299 (1921)] von der hier betrachteten verschieden ist. Sie besteht im wesentlichen darin, daß für die Ordnung der Momentenkonstanten die Zahlen einer beliebigen (geeigneten) Folge zugelassen werden, während hier stets Momentenkonstanten der Ordnung $\varkappa = 0, 1, 2, \ldots$ auftreten.

Mathematisches Institut der Technischen Hochschule München

(Eingegangen am 10. Oktober 1956)

Lingenberg, R.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 332—360 (1957)

Zur Einführung von Koordinaten in einer projektiven Ebene mit Hilfe von Endomorphismen transitiver Translationsgruppen

Von

Rolf Lingenberg

In der Theorie der projektiven Ebenen steht an zentraler Stelle das Problem, wie man eine durch die üblichen drei projektiven Inzidenzaxiome gegebene projektive Ebene Π als Koordinatenebene über einem algebraischen System darstellen kann, um dann bei speziellen Fragen die Vorteile des algebraischen Rechnens im Koordinatenbereich ausnutzen zu können. Zur Lösung dieser Aufgabe sind verschiedene Wege eingeschlagen worden, so von Hilbert [9], Schwan [14], Artin [3], Baer [4] und Hall [6][1]), um nur einige zu nennen. Die Koordinateneinführung nach Artin, die inhaltlich im wesentlichen auf Schwan [14] zurückgeht, steht hierbei den heute üblichen Begriffsbildungen und Methoden am nächsten und ist wohl auch das eleganteste Verfahren. Der Koordinatenbereich wird dabei als Unterring $\mathfrak{E}$ des Endomorphismenringes der abelschen Translationsgruppe der affinen Ebene gewonnen, die man aus Π durch Auszeichnen einer Geraden u als uneigentlicher Geraden erhält. $\mathfrak{E}$ besteht dann aus Automorphismen der Translationsgruppe, die durch Transformieren der Translationen mit den Streckungen der affinen Ebene entstehen, und dem Endomorphismus 0, der alle Translationen in das Einselement abbildet. $\mathfrak{E}$ ist ein Schiefkörper. Die Möglichkeit jedem Punkt der affinen Ebene genau ein geordnetes Paar (ξ, η) von Endomorphismen $\in \mathfrak{E}$ zuzuordnen, beruht dann auf der linearen Transitivität jeder Gruppe der genannten Streckungen. Der Nachteil dieser Koordinateneinführung besteht darin, daß sie nur für eine spezielle Klasse von projektiven Ebenen durchführbar ist, nämlich für diejenigen projektiven Ebenen, in denen es eine transitive Translationsgruppe und eine linear transitive Gruppe von Streckungen, also von Homologien in Π mit der gleichen Achse wie die Translationen gibt.

In der vorliegenden Arbeit wird nun versucht, eine analoge Koordinateneinführung auch für die projektiven Ebenen zu entwickeln, die die erwähnten Transitivitätseigenschaften nicht besitzen. Dabei werden die Translationen und Homologien durch Abbildungen einer Geraden x (der „*x-Achse*") auf sich ersetzt, die sich als Produkt zweier Perspektivitäten (Definition s. § 1) schreiben lassen und die sich in die Translationen bzw. Homologien einbetten lassen — sofern diese existieren sollten (§ 3). Man gewinnt dadurch Mengen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{H}$

[1]) Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis.

von Abbildungen, die genau einfach transitiv auf der Menge der Punkte von x, also linear transitiv sind (abgesehen von Ausnahmepunkten) und mit deren Hilfe man die Artinsche Endomorphismenrechnung nachahmen kann, wenn man statt der Menge $\mathfrak{E}$ eine Menge $\mathfrak{A}$ von Abbildungen der Menge $\mathfrak{T}$ auf sich betrachtet, die durch Verwendung der Elemente $\in \mathfrak{H}$ erklärt werden (§ 4). Im speziellen — also bei Voraussetzung weiterer Axiome für Π — hat $\mathfrak{A}$ entsprechende Eigenschaften wie $\mathfrak{E}$: Ist z.B. die Translationsgruppe transitiv, so kann man $\mathfrak{T}$ durch die Gruppe aller Translationen in „*x-Richtung*" ersetzen und zeigen, daß die Elemente $\in \mathfrak{A}$ dann Endomorphismen dieser Gruppe sind (§ 5).

Das durch das beschriebene Verfahren erhaltene System $\mathfrak{A}$, das dann als Koordinatenbereich für die gegebene Ebene Π verwendet wird, ist natürlich im allgemeinen kein Schiefkörper. Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetze brauchen nicht zu gelten. Die Gültigkeit jedes dieser Gesetze hängt an der Voraussetzung weiterer Axiome für Π, z.B. ist die Tatsache, daß die Elemente $\in \mathfrak{A}$ Endomorphismen sind, gleichwertig mit der Gültigkeit des Linksdistributivgesetzes, so daß dieses erst dann erschlossen werden kann, wenn die volle Translationsgruppe transitiv ist. Es ergeben sich dann sehr einfach eine ganze Reihe von Äquivalenzen zwischen den projektiven Ebenen, in denen geeignete Zusatzaxiome gelten, und den projektiven Koordinatenebenen über algebraischen Systemen, in denen das eine oder andere der erwähnten Rechengesetze zusätzlich gilt. Von diesen Äquivalenzen, die den bisher bei anderen Koordinateneinführungen gewonnenen gleichwertig sind[2]), werden einige wichtige Stufen dargestellt, und zwar die Kennzeichnung der projektiven Ebenen über cartesischen Zahlensystemen, Veblen-Wedderburn-Systemen, Fastkörpern, Schiefkörpern und kommutativen Körpern (§ 5)[3]).

Die zur Kennzeichnung der ersten vier Stufen verwandten Zusatzaxiome enthalten — gemäß der gewählten Methode — ausschließlich Forderungen über die Transitivität von Gruppen perspektiver Kollineationen (also von Translations- und Homologiegruppen)[4]). Die letzte Stufe wird, einer Arbeit von Baer [*4*] folgend, zunächst durch die Existenz einer perspektiven Dualität gekennzeichnet. Es wird dann aber darüber hinaus noch gezeigt, daß man statt dessen auch die schwächere Forderung der Existenz einer quasiprojektiven Dualität stellen kann. Um die Beziehungen zwischen den perspektiven Abbildungen in Π (also den Perspektivitäten, perspektiven Kollineationen und Dualitäten) deutlich werden zu lassen, die den Äquivalenzen von Rechengesetz und den benutzten Zusatzforderungen an Π zugrunde liegen, wurde

[2]) Vgl. dazu das Buch von G. Pickert [*13*].

[3]) Hierbei ist zu sagen, daß jede dieser Stufen nicht mit der nächstfolgenden zusammenfällt, da man für jede Stufe echte algebraische Systeme kennt, die zwar die der Stufe entsprechenden Rechengesetze, aber nicht die der nächstfolgenden Stufe erfüllen.

[4]) Bei den übrigen Arten von Koordinateneinführungen werden als Zusatzaxiome meistens die Gültigkeit von Schließungssätzen gefordert, so etwa von Spezialfällen des Satzes von Desargues, die im wesentlichen der Transitivität von speziellen Gruppen perspektiver Kollineationen äquivalent ist. Vgl. [*13*].

darauf verzichtet, mit Koordinaten zu rechnen*). Außerdem stellten sich bei diesem Vorgehen für sich interessante Tatsachen über die perspektiven Abbildungen heraus (vgl. dazu auch Satz 16 und 17 aus dem Anhang, in dem ein in § 5 geführter Beweis bei schwächeren Voraussetzungen wiederholt wird).

Für den Beweis, daß aus den Eigenschaften der Automorphismen $\in \mathfrak{A}$, die den Rechengesetzen gleichwertig sind, die Existenz von perspektiven Kollineationen und Dualitäten folgt, ist ein allgemeiner Satz von besonderer Bedeutung, der in § 2 bewiesen wird und im wesentlichen besagt, daß ein Isomorphismus zwischen einfach transitiven Gruppen perspektiver Kollineationen, der die Gruppen komponentenweise ineinander überführt, stets durch einen inneren Automorphismus der Gruppe aller Kollineationen und Dualitäten der projektiven Ebene induziert wird.

§ 1. Perspektive Kollineationen und perspektive Dualitäten

Wir verstehen unter einer *projektiven Ebene* Π eine Menge von Punkten und Geraden, in der eine Inzidenz zwischen Punkt und Gerade erklärt ist und in der folgende Axiome gelten:

P1. *Zu zwei verschiedenen Punkten P, Q gibt es eine und nur eine Gerade $g=(P, Q)$, die mit P und Q inzidiert (geschrieben $g \mathrel{I} P, Q$).*

P2. *Zu zwei verschiedenen Geraden g, h gibt es einen und nur einen Punkt $P=(g, h)=g \cdot h$, der mit g und h inzidiert.*

P3. *Es gibt wenigstens vier Punkte, von denen keine drei mit einer Geraden inzidieren.*

Aus Axiom P3 folgt, daß auf jeder Geraden wenigstens drei verschiedene Punkte liegen. Um Ausnahmefälle zu vermeiden, wollen wir darüber hinaus — soweit notwendig — voraussetzen, daß auf jeder Geraden wenigstens vier verschiedene Punkte liegen (z.B. für Satz 1—3, Lemma 12, 13).

Unter einer *Perspektivität* in der projektiven Ebene verstehen wir eine eineindeutige Abbildung der Punkte auf einer Geraden g auf die Menge der Punkte einer Geraden h, bei der Punkt und Bildpunkt jeweils auf einer Geraden durch einen festen Punkt Z liegen, der nicht mit g oder h inzidiert[5]). Wir bezeichnen eine Perspektivität mit $\pi_{g Z h}$. Der Punkt Z heißt das Zentrum von $\pi_{g Z h}$.

Eine eineindeutige Abbildung der Menge der Punkte einer projektiven Ebene auf sich heißt eine *Kollineation*, wenn kollineare Punkte (d.h. Punkte auf einer Geraden) in kollineare Punkte übergehen; und eine eineindeutige Abbildung der Menge der Punkte der projektiven Ebene auf die Menge der Geraden der projektiven Ebene heißt eine *Dualität*[6]), wenn kollineare Punkte in konkurrente Geraden (d.h. Geraden durch einen Punkt) übergehen.

*) wodurch die Beweise auch nur zum Teil abgekürzt worden wären.

[5]) Geschrieben $Z \not\mathrel{I} g, h$.

[6]) Auch Korrelation genannt.

Eine Kollineation π heißt eine *perspektive Kollineation*[7]) *mit Zentrum Z und Achse a*, wenn

$$P\pi = P \quad \textit{für alle } P \mathrel{I} a, \qquad g\pi = g \quad \textit{für alle } g \mathrel{I} Z$$

gilt. Ist $Z \mathrel{I} a$, so heißt π eine *Translation*[8]) und ist $Z \nmid a$, so heißt π eine *Homologie*.

Eine Dualität δ einer projektiven Ebene heißt eine *perspektive Dualität mit Zentrum Z und Achse a*, wenn für $Z \nmid a$

$$P\delta = (P, Z) \quad \textit{für alle } P \mathrel{I} a, \qquad g\delta = (g, a) \quad \textit{für alle } g \mathrel{I} Z$$

gilt.

Ist π eine perspektive Kollineation mit Z als Zentrum und a als Achse, so gilt für alle Punkte P und alle Geraden g:

(1) *$P, P\pi, Z$ sind kollinear und $g, g\pi, a$ sind konkurrent.*

Für die perspektiven Kollineationen und Dualitäten gilt bekanntlich weiter[9]):

Lemma 1. *Es gibt höchstens eine perspektive Kollineation mit Z als Zentrum und a als Achse, welche einen Punkt P auf einen Punkt Q auf (P, Z) $[P, Q \neq Z;$ $P, Q \nmid a]$ abbildet, und höchstens eine perspektive Dualität mit Z als Zentrum und a als Achse, welche einen Punkt P $[P \nmid a;$ $P \neq Z]$ auf eine Gerade q $[q \neq a,$ $(P, Z)]$ durch $(P, Z) \cdot a$ abbildet.*

Lemma 2. *Besitzt eine Kollineation α entweder eine Fixgerade a, die punktweise festbleibt, oder einen Fixpunkt Z, der geradenweise festbleibt, so ist α eine perspektive Kollineation mit a als Achse bzw. mit Z als Zentrum.*

Beweis von Lemma 2. Da die zweite Aussage von Lemma 2 dual zu der ersten ist, genügt es, diese zu beweisen. Es möge also eine Gerade a geben, die bei α punktweise festbleibt. Dann gilt:

(2) *Ist $P \neq P\alpha$, so ist $(P, P\alpha) = g$ Fixgerade von α.*

Denn sei $(g, a) = Q$, also $g = (P, Q) = (P\alpha, Q)$, so gilt $Q\alpha = Q$ und damit $g\alpha = (P, Q)\alpha = (P\alpha, Q) = g$. Da nun der Schnittpunkt zweier Fixgeraden Fixpunkt ist und da ferner eine Kollineation $\neq 1$, die eine Gerade a punktweise festläßt, höchstens einen Fixpunkt Z mit $Z \nmid a$ besitzen kann, folgt aus (2):

(3) *Es gibt einen Punkt Z, so daß für alle P mit $P \neq P\alpha$ gilt $Z \mathrel{I} (P, P\alpha)$. Z ist Fixpunkt von α.*

Da nun jede Gerade g durch Z Fixgerade ist [wählt man nämlich einen Punkt P auf g mit $P \neq P\alpha$, so gilt nach (3) $(P, P\alpha) \mathrel{I} Z$ und damit $(P, P\alpha) = g$], muß α perspektive Kollineation mit a als Achse und Z als Zentrum sein.

[7]) In [*13*] zentrale Kollineation genannt.

[8]) Dieser Name wurde gewählt, weil die Translationen in einer affinen Ebene, als Kollineationen der projektiven Erweiterung derselben aufgefaßt, perspektive Kollineationen sind, deren Zentrum auf der Achse (nämlich der uneigentlichen Geraden) liegt.

[9]) Siehe [*4*] oder [*13*].

Ist α eine beliebige Kollineation oder Dualität und ist π eine perspektive Kollineation bzw. Dualität mit Z als Zentrum und a als Achse, so ist offenbar $\alpha^{-1}\pi\alpha$ perspektive Kollineation bzw. Dualität mit $Z\alpha$ als Zentrum und $a\alpha$ als Achse, wenn α Kollineation, und mit $a\alpha$ als Zentrum und $Z\alpha$ als Achse, wenn α Dualität ist.

§ 2. Transitive Gruppen von perspektiven Kollineationen

Die perspektiven Kollineationen mit festem Zentrum Z und fester Achse a bilden eine Gruppe, die wir mit $\mathfrak{P}_{Za}$ bezeichnen. Die Menge $\mathfrak{D}_{Za}$ der perspektiven Dualitäten mit festem Zentrum Z und fester Achse a erzeugt (sofern sie nicht leer ist) eine Gruppe, die die Gruppe $\mathfrak{P}_{Za}$ der Homologien mit Z als Zentrum und a als Achse als Untergruppe vom Index 2 und $\mathfrak{D}_{Za}$ als deren Nebenklasse enthält.

Die Existenz von perspektiven Kollineationen und Dualitäten ist für eine beliebige projektive Ebene selbstverständlich nicht gesichert; die Gruppen $\mathfrak{P}_{Za}$ können also alle nur aus dem Einselement bestehen und die Mengen $\mathfrak{D}_{Za}$ alle leer sein. Wir definieren nun:

Eine Gruppe $\mathfrak{P}_{Za}$ von perspektiven Kollineationen heißt *linear transitiv* auf einer festen Geraden g mit $g \mathrel{I} Z$, wenn es zu zwei beliebigen Punkten P, Q auf g $[P, Q \neq Z;\ P, Q \nmid a]$ eine perspektive Kollineation $\pi \in \mathfrak{P}_{Za}$ mit $P\pi = Q$ gibt. Entsprechend heißt die Menge $\mathfrak{D}_{Za}$ *linear transitiv* auf einer festen Geraden g mit $g \mathrel{I} Z$, wenn es zu einem beliebigen Punkt P auf g $[P \neq Z;\ P \nmid a]$ und einer beliebigen Geraden q durch $g \cdot a$ $[q \neq a, g]$ eine perspektive Dualität $\delta \in \mathfrak{D}_{Za}$ mit $P\delta = q$ gibt.

Man sieht leicht ein[10]), daß $\mathfrak{P}_{Za}$ bzw. $\mathfrak{D}_{Za}$ dann und nur dann auf einer Geraden g linear transitiv ist, wenn sie auch auf einer beliebigen anderen Geraden g' mit $g' \mathrel{I} Z$ linear transitiv ist. Den Zusatz *„auf einer Geraden g"* zu linear transitiv können wir daher hinfort weglassen. Ebenfalls ohne Mühe zeigt man[10]) das folgende

Lemma 3. *Ist die Gruppe $\mathfrak{P}_{Za}$ und auch die Gruppe $\mathfrak{P}_{Z'a}$ mit $Z' \neq Z$ linear transitiv, so ist jede Gruppe $\mathfrak{P}_{Z''a}$ mit $Z'' \mathrel{I} (Z, Z')$ linear transitiv.*

Die Voraussetzungen von Lemma 3 können im allgemeinen noch abgeschwächt werden:

Lemma 4. *Ist die Gruppe $\mathfrak{P}_{Za}$ linear transitiv und gibt es eine Kollineation α mit $a\alpha = a$, jedoch $Z\alpha \neq Z$, so ist jede Gruppe $\mathfrak{P}_{Z'a}$ mit $Z' \mathrel{I} (Z, Z\alpha)$ linear transitiv.*

Der Beweis von Lemma 4 ergibt sich sofort aus Lemma 3, wenn man bedenkt, daß mit $\mathfrak{P}_{Za}$ auch $\alpha^{-1}\mathfrak{P}_{Za}\alpha$ eine linear transitive Gruppe von perspektiven Kollineationen ist, deren Elemente a als Achse und $Z\alpha \neq Z$ als Zentrum haben.

Die Menge aller perspektiven Kollineationen mit gleicher Achse u bildet nach Lemma 2 eine Gruppe $\mathfrak{P}_u$. Sind $\pi, \pi' \neq 1$ zwei Elemente $\in \mathfrak{P}_u$ und Z, Z' deren Zentren, so liegt das Zentrum der perspektiven Kollineation $\pi\pi'$

[10]) Siehe BAER [4].

entweder auf (Z, Z') — für $Z \neq Z'$ — oder es ist gleich Z, wenn nämlich $Z = Z'$ ist. Daher bilden alle diejenigen Elemente $\in \mathfrak{P}_u$, deren Zentren auf einer festen Geraden v liegen, eine Untergruppe von $\mathfrak{P}_u$, die wir mit $\mathfrak{P}_{vu}$ bezeichnen wollen.

Dual hierzu bilden alle perspektiven Kollineationen mit gleichem Zentrum U eine Gruppe $\mathfrak{P}_U$, die als Untergruppe $\mathfrak{P}_{UV}$ die Menge aller Elemente $\in \mathfrak{P}_U$ mit einer Achse durch einen festen Punkt V enthält. $\mathfrak{P}_{uu}$ ist ersichtlich die Gruppe aller Translationen mit u als Achse und $\mathfrak{P}_{UU}$ die Gruppe aller Translationen mit U als Zentrum.

Wir nennen nun jede Untergruppe $\mathfrak{P}_{Zu}$ von $\mathfrak{P}_{vu}$ [für $Z \mathrel{I} v$] und entsprechend jede Untergruppe $\mathfrak{P}_{Ua}$ von $\mathfrak{P}_{UV}$ [für $a \mathrel{I} V$] eine *Komponente* von $\mathfrak{P}_{vu}$ bzw. von $\mathfrak{P}_{UV}$. Sind zwei Komponenten der Gruppe $\mathfrak{P}_{vu}$ bzw. der Gruppe $\mathfrak{P}_{UV}$ linear transitiv, so ist nach Lemma 3 (bzw. der dualen Aussage) jede Komponente von $\mathfrak{P}_{vu}$ bzw. $\mathfrak{P}_{UV}$ linear transitiv. Die Gruppe $\mathfrak{P}_{vu}$ (und entsprechend die Gruppe $\mathfrak{P}_{UV}$) ist dann als Produkt (im Sinne der Komplexmultiplikation in einer Gruppe) zweier Komponenten darstellbar. Denn sei Z ein Punkt mit $Z \mathrel{I} v, u$ und Z' ein Punkt $\neq Z$ auf v, ferner π ein beliebiges Element $\neq 1$ mit $\pi \in \mathfrak{P}_{vu}$ und endlich P ein beliebiger Punkt mit $P \nmid v, u$, so ist $(P, Z') \neq (P\pi, Z)$ und $Q = (P, Z') \cdot (P\pi, Z) \nmid v, u$, außerdem aber natürlich auch $P\pi \nmid v, u$. Mithin gibt es ein $\omega \in \mathfrak{P}_{Z'u}$ mit $P\omega = Q$ und ein $\tau \in \mathfrak{P}_{Zu}$ mit $Q\tau = P\pi$. Damit gilt $P\omega\tau = P\pi$ und, da $\omega\tau$ und π dasselbe Zentrum haben müssen (nämlich $Z'' = (P\pi, P) \cdot v$), nach Lemma 1 weiter $\pi = \omega\tau$. Also folgt $\mathfrak{P}_{vu} = \mathfrak{P}_{Z'u}\mathfrak{P}_{Zu}$. Entsprechendes erhält man für die Gruppe $\mathfrak{P}_{UV}$ mit dualen Schlüssen.

Die Darstellung $\pi = \omega\tau$ von $\pi \in \mathfrak{P}_{vu}$ als Produkt einer perspektiven Kollineation $\omega \in \mathfrak{P}_{Z'u}$ und einer Translation $\tau \in \mathfrak{P}_{Zu}$ ist eindeutig, denn wäre $\pi = \omega'\tau'$ mit $\omega' \in \mathfrak{P}_{Z'u}$ und $\tau' \in \mathfrak{P}_{Zu}$, so folgte aus $\omega \neq \omega'$ auch $P\omega \neq P\omega'$, also $(P\omega, Z) \neq (P\omega', Z)$. Dann aber läge $P\omega'\tau' = P\pi$ auf $(P\omega', Z)$ und auf $(P\omega, Z)$, wäre also gleich Z, im Widerspruch zu $P\pi \nmid v, u$. Also gilt $\omega = \omega'$ und damit wegen $P\omega\tau' = P\pi = P\omega\tau$ nach Lemma 1 $\tau' = \tau$. Dual hierzu muß gelten, daß sich jedes Element der Gruppe $\mathfrak{P}_{UV}$ eindeutig als Produkt $\omega\tau$ mit $\omega \in \mathfrak{P}_{Ua}$ und $\tau \in \mathfrak{P}_{Ua'}$ $[a, a' \mathrel{I} V;\ a' \mathrel{I} U;\ a \neq a']$ darstellen läßt.

Die Gruppe $\mathfrak{P}_{vu}$ ist dann genau einfach transitiv[11]) auf der Menge der Punkte P mit $P \nmid u, v$, und die Gruppe $\mathfrak{P}_{UV}$ ist dann genau einfach transitiv auf der Menge der Geraden g mit $g \nmid U, V$. Wir bezeichnen das eindeutig bestimmte Element $\in \mathfrak{P}_{vu}$, welches den Punkt P in den Punkt Q überführt $[P, Q \nmid u, v]$, mit π_{PQ}; entsprechend mit π_{pq} das eindeutig bestimmte Element $\in \mathfrak{P}_{UV}$, welches die Gerade p in die Gerade q überführt $[p, q \nmid U, V]$. Für die Transitivität der Gruppe $\mathfrak{P}_{vu}$ bzw. der Gruppe $\mathfrak{P}_{UV}$ genügt nach Lemma 4 im Falle $u \neq v$ bzw. $U \neq V$ die Voraussetzung, daß eine einzige Komponente $\mathfrak{P}_{Zu}$ mit $Z \nmid u$ linear transitiv ist und eine andere nicht nur aus dem Einselement besteht.

[11]) Eine Menge $\mathfrak{M}$ von Abbildungen in einer projektiven Ebene heißt *einfach transitiv* auf einer Menge $\mathfrak{N}$ von Punkten bzw. Geraden, wenn es zu zwei Elementen $A, B \in \mathfrak{N}$ stets eine Abbildung $\alpha \in \mathfrak{M}$ mit $A\alpha = B$ gibt.

Ist α eine Kollineation, so ist die Abbildung φ mit $\pi^{\varphi} = \alpha^{-1}\pi\alpha$ für alle $\pi \in \mathfrak{P}_{vu}$ ein Isomorphismus der Gruppe $\mathfrak{P}_{vu}$ auf die Gruppe $\mathfrak{P}_{v'u'}$ mit $u' = u\alpha$ und $v' = v\alpha$, der eine Komponente von $\mathfrak{P}_{vu}$ in eine Komponente von $\mathfrak{P}_{v'u'}$ überführt. Umgekehrt gilt

Satz 1. *Sind die Gruppen $\mathfrak{P}_{vu}$ und $\mathfrak{P}_{v'u'}$ einfach transitiv*[12]) *und ist φ ein Isomorphismus von $\mathfrak{P}_{vu}$ und $\mathfrak{P}_{v'u'}$, der jede Komponente von $\mathfrak{P}_{vu}$ in eine Komponente von $\mathfrak{P}_{v'u'}$ überführt, so gibt es zu jedem Punktepaar P, P' $[P \nmid u, v;$ $P' \nmid u', v']$ eine Kollineation α, so daß*

$$\pi^{\varphi} = \alpha^{-1}\pi\alpha \qquad \textit{für alle } \pi \in \mathfrak{P}_{vu}$$

und $P\alpha = P'$ gilt.

Satz 2. *Sind die Gruppen $\mathfrak{P}_{UV}$ und $\mathfrak{P}_{U'V'}$ einfach transitiv*[12]) *und ist φ ein Isomorphismus von $\mathfrak{P}_{UV}$ und $\mathfrak{P}_{U'V'}$, der jede Komponente von $\mathfrak{P}_{UV}$ in eine Komponente von $\mathfrak{P}_{U'V'}$ überführt, so gibt es zu jedem Geradenpaar p, p' $[p \nmid U, V;$ $p' \nmid U', V']$ eine Kollineation α, so daß*

$$\pi^{\varphi} = \alpha^{-1}\pi\alpha \qquad \textit{für alle } \pi \in \mathfrak{P}_{UV}$$

und $p\alpha = p'$ gilt.

Da die Sätze 1 und 2 zueinander dual sind, genügt es, einen der beiden zu beweisen.

Beweis von Satz 2. Die Abbildung α mit

$$q\alpha = p'\pi^{\varphi}_{pq} \qquad \textit{für } q \nmid U, V \tag{4}$$

ist eine eineindeutige Abbildung der Menge der Geraden q mit $q \nmid U, V$ auf die Menge der Geraden q' mit $q' \nmid U', V'$. Konkurrente Geraden gehen dabei in konkurrente Geraden über, denn seien q, r, s drei voneinander verschiedene Geraden durch einen Punkt P mit $P \neq U, V$, so haben π_{qr}, π_{qs} die gleiche Achse, nämlich (P, V), da sich Gerade und Bildgerade hinsichtlich einer perspektiven Kollineation auf der Achse derselben schneiden und die Achse jedes Elementes von $\mathfrak{P}_{UV}$ durch V geht. Da somit π_{qr}, π_{qs} einer Komponente von $\mathfrak{P}_{UV}$ angehören, gilt dies nach Voraussetzung auch für $\pi^{\varphi}_{qr}, \pi^{\varphi}_{qs}$, die also ebenfalls die gleiche Achse haben. Aus $\pi_{pq}\pi_{qr} = \pi_{pr}$ und $\pi_{pq}\pi_{qs} = \pi_{ps}$, also $\pi^{\varphi}_{pq}\pi^{\varphi}_{qr} = \pi^{\varphi}_{pr}$ und $\pi^{\varphi}_{pq}\pi^{\varphi}_{qs} = \pi^{\varphi}_{ps}$ folgt

$$r\alpha = p'\pi^{\varphi}_{pr} = p'\pi^{\varphi}_{pq}\pi^{\varphi}_{qr} = (q\alpha)\,\pi^{\varphi}_{qr}$$
$$s\alpha = p'\pi^{\varphi}_{ps} = p'\pi^{\varphi}_{pq}\pi^{\varphi}_{qs} = (q\alpha)\,\pi^{\varphi}_{qs}.$$

Mithin schneiden sich nach (1) sowohl $q\alpha$ und $r\alpha$ als auch $q\alpha$ und $s\alpha$ auf der Achse von π^{φ}_{qr}, woraus sich ergibt, daß $q\alpha, r\alpha, s\alpha$ konkurrent sind.

Hiermit geht ein Geradenbüschel mit Zentrum $P \neq U, V$ in ein Geradenbüschel mit Zentrum $P' \neq U', V'$ über. P' kann als das Bild $P\alpha$ von P hinsichtlich α aufgefaßt werden. Mit dem Bewiesenen ist also gezeigt, daß α eine eineindeutige Abbildung der Menge der Punkte $\neq U, V$ und der Geraden

[12]) Der Kürze halber soll im folgenden der Zusatz „auf der Menge der Punkte P mit $P \nmid u, v$" im Falle der Gruppe $\mathfrak{P}_{uv}$ bzw. „auf der Menge der Geraden g mit $g \nmid U, V$" im Falle der Gruppe $\mathfrak{P}_{UV}$ stets weggelassen werden.

$\nmid U, V$ auf die Menge der Punkte $\neq U', V'$ und der Geraden $\nmid U', V'$ ist, bei der die Inzidenz erhalten bleibt. Dann aber läßt sich α sofort zu einer Kollineation der Ebene erweitern: Die Punkte $P, Q, R, \ldots$ einer Punktreihe a durch U bzw. V gehen in die Punkte einer Punktreihe a' durch U' oder V' über, denn wäre $(P\alpha, Q\alpha) = b \nmid U', V'$, so folgte $b\alpha^{-1} = a \nmid U, V$ im Widerspruch zur Voraussetzung, also gilt $(P\alpha, Q\alpha) \mathrel{I} U'$ oder V' und entsprechend $(P\alpha, R\alpha), (Q\alpha, R\alpha) \mathrel{I} U'$ oder V'. Wäre nun $(P\alpha, Q\alpha) \mathrel{I} U'$, jedoch $(P\alpha, R\alpha) \mathrel{I} V' \neq U'$, so folgte, wenn $P, Q, R \neq U, V$ ist, $(Q\alpha, R\alpha) \nmid U', V'$, im Widerspruch zum eben Bewiesenen. Daher kann man a' als das Bild $a\alpha$ von a hinsichtlich α definieren. Das Geradenbüschel durch U — und entsprechend das Geradenbüschel durch V — geht entweder in das Geradenbüschel durch U' oder in das durch V' über, denn wäre für $a, b, c \mathrel{I} U$, $(a, b, c$ voneinander verschieden) etwa $(a\alpha, b\alpha) = A \neq U', V'$, so folgte $A\alpha^{-1} = a \cdot b \neq U$, im Widerspruch zur Voraussetzung, also gilt $(a\alpha, b\alpha) = U'$ oder V' und entsprechend $(a\alpha, c\alpha)$, $(b\alpha, c\alpha) = U'$ oder V'. Wäre dann $(a\alpha, b\alpha) = U'$, jedoch $(a\alpha, c\alpha) = V' \neq U'$, so folgte für $a, b, c \neq (U, V)$, daß $(b\alpha, c\alpha) \neq U', V'$ gilt, im Widerspruch zum eben Bewiesenen. Somit kann man auch für U und V eindeutig ein Bild hinsichtlich α so definieren, daß die Inzidenz erhalten bleibt. Mithin ist die derart erweiterte Abbildung α eine Kollineation.

Es gilt nun $(q\alpha)\alpha^{-1}\pi\alpha = q\pi\alpha = p'\pi^{\varphi}_{p(q\pi)} = p'\pi^{\varphi}_{pq}\pi^{\varphi}_{q(q\pi)} = p'\pi^{\varphi}_{pq}\pi^{\varphi} = (q\alpha)\pi^{\varphi}$, also — da $\alpha^{-1}\pi\alpha, \pi^{\varphi}$ perspektive Kollineationen $\in \mathfrak{P}_{U'V'}$ sind — nach Lemma 1 $\alpha^{-1}\pi\alpha = \pi^{\varphi}$. Da weiterhin auch $p\alpha = p'\pi^{\varphi}_{pp} = p'$ gilt, ist Satz 2 vollständig bewiesen.

Satz 1 besitzt eine Reihe von wichtigen Spezialfällen und Folgerungen, von denen wir die nachstehenden anführen wollen:

1. *Ist φ ein Automorphismus der einfach transitiven Gruppe $\mathfrak{P}_{vu}$, der jede Komponente in sich überführt, so ist jede nach Satz 1 zu φ gehörende Kollineation α eine perspektive Kollineation mit v als Achse.*

2. *Ist φ ein Automorphismus der einfach transitiven Gruppe $\mathfrak{P}_{vu}$, der jede Komponente wieder in eine Komponente, dabei eine Komponente $\mathfrak{P}_{Zu}[Z \mathrel{I} v]$ elementweise in sich überführt, so ist jede nach Satz 1 zu φ gehörende Kollineation α eine perspektive Kollineation mit $(Z, P) = w$ als Achse und einem Zentrum Z' mit $Z' \mathrel{I} u, v$, wenn $P = P'$ gewählt wird.*

Denn jeder Punkt Q auf w ist Fixpunkt: $Q\alpha = P\pi^{\varphi}_{PQ} = P\pi_{PQ} = Q$, da $\pi_{PQ} \in \mathfrak{P}_{Zu}$. Da ferner u, v Fixgeraden $\neq w$ von α sind, muß das Zentrum von α auf u und v liegen.

3. *Ist die Gruppe $\mathfrak{P}_{vu}$ einfach transitiv, so auch die Gruppe $\mathfrak{P}_{uv}$. Die Elemente $\in \mathfrak{P}_{vu}$ kommutieren mit den Elementen von $\mathfrak{P}_{uv}$.*

Beweis. Zu dem identischen Automorphismus von $\mathfrak{P}_{vu}$ existiert nach Satz 1 für jedes Punktepaar P, P' $[P, P' \nmid u, v]$ eine Kollineation α mit $P\alpha = P'$ und $\pi = \alpha^{-1}\pi\alpha$ für alle $\pi \in \mathfrak{P}_{vu}$. α ist nach 1 perspektive Kollineation mit v als Achse. Das Zentrum von α liegt auf u, denn wegen $\pi^{-1}\alpha\pi = \alpha$ ist das Zentrum von α Fixpunkt für alle $\pi \in \mathfrak{P}_{vu}$ und muß daher mit u inzidieren. Die zweite Aussage von 3 folgt unmittelbar aus $\pi = \alpha^{-1}\pi\alpha$, also $\alpha\pi = \pi\alpha$.

Als Spezialfall ist in 3 enthalten, daß die Gruppe $\mathfrak{P}_{uu}$ abelsch ist.

4. *Ist die Gruppe $\mathfrak{P}_{uu}$ einfach transitiv, so gibt es zu jedem Punkt P mit $P \nmid u$ eine Homologie σ mit P als Zentrum und u als Achse, für die $\sigma^2 = 1$ und $\sigma\tau\sigma = \tau^{-1}$ für alle $\tau \in \mathfrak{P}_{uu}$ gilt. Gibt es eine nichtinvolutorische Translation $\tau \neq 1$ in $\mathfrak{P}_{uu}$, so ist σ involutorisch.*

Beweis. Da nach 3 die Gruppe $\mathfrak{P}_{uu}$ abelsch ist, ist die Abbildung φ mit $\tau^\varphi = \tau^{-1}$ ein Automorphismus von $\mathfrak{P}_{uu}$, der jede Komponente in sich überführt. Mithin gehört zu φ nach 1 eine Homologie σ mit u als Achse und P als Zentrum, wobei P beliebig $[P \nmid u]$ gewählt werden kann. Aus $\tau^\varphi = \sigma^{-1}\tau\sigma = \tau^{-1}$ folgt $(P\tau)\sigma^2 = P\sigma\tau^{-1}\sigma = P\sigma^2\sigma^{-1}\tau^{-1}\sigma = P\sigma^2\tau = P\tau$, also nach Lemma 1 $\sigma^2 = 1$, da $P\tau \nmid u$ und $P\tau \neq P$ angenommen werden kann.

Mit den Aussagen 1—4 gelten natürlich auf Grund von Satz 2 auch die dualen Aussagen. Diese werden wir im folgenden mit 1′, 2′ usw. zitieren.

Satz 1 und 2 können wir noch den nachstehenden Satz an die Seite stellen, dessen Beweis mutatis mutandis der gleiche ist wie für Satz 2, so daß wir auf eine ausführliche Wiedergabe wohl verzichten dürfen.

Satz 3. *Sind die Gruppen $\mathfrak{P}_{vu}$ und $\mathfrak{P}_{UV}$ einfach transitiv und ist φ ein Isomorphismus von $\mathfrak{P}_{vu}$ und $\mathfrak{P}_{UV}$, der jede Komponente von $\mathfrak{P}_{vu}$ in eine Komponente von $\mathfrak{P}_{UV}$ überführt, so gibt es zu jedem Paar P, p $[P \nmid u, v;\ p \nmid U, V]$ eine Dualität δ, so daß*

$$\pi^\varphi = \delta^{-1}\pi\delta \qquad \text{für alle } \pi \in \mathfrak{P}_{vu}$$

und $P\delta = p$ gilt.

§ 3. Einige Beziehungen zwischen Perspektivitäten und perspektiven Kollineationen. Vorbereitungen für § 4

Für das folgende wählen wir drei feste, nicht kollineare Punkte O, U, V mit den Verbindungsgeraden $x = (O, U)$, $y = (O, V)$ und $u = (U, V)$. Ferner sei eine Gerade $\bar{z}$ mit $\bar{z} \mid U$, jedoch $\bar{z} \neq x$, u fest gewählt. Dann führen wir zur Abkürzung nachstehende Bezeichnungen ein:

$$\sigma_A = \pi_{xAu};$$
$$\varrho_{Az} = \pi_{xAz} \quad \text{für} \quad A \mid u \quad \text{und} \quad z \mid U;$$
$$\varphi_A = \pi_{xAy} \quad \text{für} \quad A \mid u.$$

Speziell soll darüber hinaus noch $\varrho_{V\bar{z}} = \varrho_z$ und $\varrho_{A\bar{z}} = \varrho_A$ sein. Ist nun X ein Punkt auf x, so bezeichnen wir den Punkt $X\varrho_V$ mit X', den Punkt $X\varphi_Z$ [für fest gewählten Punkt $Z \neq U, V$ auf u] mit $\tilde{X}$ und den Punkt $X\sigma_{O'}$ mit $\bar{X}$.

Die Abbildungen

$$\bar{\tau}_A = \sigma_{O'}\sigma_{A'}^{-1} \quad \text{und} \quad \bar{\tau}_A^* = \varrho_V\varrho_{\bar{A}}^{-1} \qquad \text{für } A \mid x \text{ mit } A \neq U$$

sind projektive[13]) Abbildungen der Geraden x auf sich, für die

$$O\bar{\tau}_A = A,\ U\bar{\tau}_A = U; \qquad O\bar{\tau}_A^* = A,\ U\bar{\tau}_A^* = U$$

[13]) Unter einer projektiven Abbildung einer Geraden a auf eine Gerade b versteht man eine Abbildung von a auf b, die sich als Produkt von Perspektivitäten schreiben läßt.

gilt. Zu jedem $A \neq U$ auf x gibt es eineindeutig eine Abbildung $\bar{\tau}_A$ und eineindeutig eine Abbildung $\bar{\tau}_A^*$. Die Menge der Abbildungen $\bar{\tau}_A$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{T}$, die Menge der Abbildungen $\bar{\tau}_A^*$ mit $\mathfrak{T}^*$. Offenbar gilt nun

$$X\bar{\tau}_A = A\bar{\tau}_X^* \qquad \textit{für } A, X \neq U \textit{ auf } x. \tag{5}$$

Die Menge $\mathfrak{T}$ (und entsprechend die Menge $\mathfrak{T}^*$) ist genau einfach transitiv auf der Menge der Punkte $\neq U$ auf x, denn seien A, B zwei beliebige Punkte $\neq U$ auf x und $C = B\bar{\tau}_A^{*-1}$, so gilt wegen (5) $A\bar{\tau}_C = B$.

Wir definieren nun eine Verknüpfung für die Elemente aus $\mathfrak{T}$, die nicht notwendig mit dem Hintereinanderausführen der Abbildungen übereinzustimmen braucht:

$$\bar{\tau}_A \circ \bar{\tau}_B = \bar{\tau}_C \textit{ mit } C = O\bar{\tau}_A\bar{\tau}_B = A\bar{\tau}_B \text{[14]}. \tag{6}$$

Es gilt dann

Lemma 5. *Die Menge $\mathfrak{T}$ bildet hinsichtlich der Verknüpfung* (6) *ein Loop* [15].

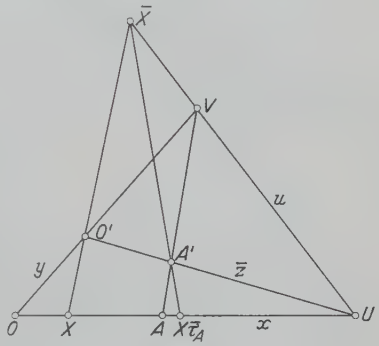

Fig. 1

Beweis. Offenbar ist $\bar{\tau}_O$ die identische Abbildung der Geraden x auf sich, und daher gilt $\bar{\tau}_A \circ \bar{\tau}_O = \bar{\tau}_A$ und $\bar{\tau}_O \circ \bar{\tau}_A = \bar{\tau}_A$. Ferner sind die Gleichungen $\bar{\tau}_A \circ \bar{\tau}_X = \bar{\tau}_B$ und $\bar{\tau}_Y \circ \bar{\tau}_A = \bar{\tau}_B$ für vorgegebene $\bar{\tau}_A$, $\bar{\tau}_B$ stets eindeutig lösbar, denn sei $X = B\bar{\tau}_A^{*-1}$, also nach (5) $A\bar{\tau}_X = B$, und $Y = B\bar{\tau}_A^{-1}$, so gilt $O\bar{\tau}_A\bar{\tau}_X = A\bar{\tau}_X = B$ und $O\bar{\tau}_Y\bar{\tau}_A = Y\bar{\tau}_A = B$ und damit die Behauptung.

Das Loop $\mathfrak{T}$ ist dann und nur dann eine Gruppe, wenn die Verknüpfung (6) mit dem Hintereinanderausführen der Abbildungen $\bar{\tau}_A$ übereinstimmt, wenn also gilt

$$\bar{\tau}_A \circ \bar{\tau}_B = \bar{\tau}_A\bar{\tau}_B = \bar{\tau}_{A\bar{\tau}_B}, \tag{7}$$

denn das Hintereinanderausführen von Abbildungen genügt stets dem assoziativen Gesetz, und andererseits folgt aus

$$X(\bar{\tau}_A \circ \bar{\tau}_B) = O\big(\bar{\tau}_X \circ (\bar{\tau}_A \circ \bar{\tau}_B)\big) = O\big((\bar{\tau}_X \circ \bar{\tau}_A) \circ \bar{\tau}_B\big) = (X\bar{\tau}_A)\bar{\tau}_B = X\bar{\tau}_A\bar{\tau}_B$$

für alle $X \neq U$ auf x Gl. (7).

Ist $\mathfrak{T}$ eine Gruppe, so gilt

$$\bar{\tau}_A^*\bar{\tau}_B = \bar{\tau}_B\bar{\tau}_A^*, \tag{8}$$

da nach (5) und (7) $(X\bar{\tau}_A^*)\bar{\tau}_B = A\bar{\tau}_X\bar{\tau}_B = A\bar{\tau}_{X\bar{\tau}_B} = (X\bar{\tau}_B)\bar{\tau}_A^*$ für alle $X \neq U$ auf x ist.

[14]) D.h., C ist das Bild des Punktes O hinsichtlich der Abbildung $\bar{\tau}_A\bar{\tau}_B$ (die ja nicht notwendig in $\mathfrak{T}$ enthalten ist).

[15]) Ein Loop ist ein algebraisches System $\mathfrak{S}$, in dem eine Verknüpfung $\circ$ erklärt ist, für die folgende Regeln gelten: (a) Zu $a, b \in \mathfrak{S}$ gibt es genau ein $c \in \mathfrak{S}$ mit $a \circ b = c$. (b) Zu $b, c \in \mathfrak{S}$ gibt es genau ein x mit $x \circ b = c$. (c) Zu $a, c \in \mathfrak{S}$ gibt es genau ein y mit $a \circ y = c$. (d) Es gibt genau ein „neutrales" Element n mit $a \circ n = a$ und $n \circ b = n$ für alle $a, b \in \mathfrak{S}$.

Gl. (8) können wir auch die folgende Form geben:

$$(8') \qquad \varrho_V^{-1}\bar{\tau}_B\varrho_V = \varrho_{V'}^{-1}\bar{\tau}_B\varrho_{V'} \qquad \textit{mit bel. } V' \neq U \textit{ auf } u$$

(man setze nämlich $\bar{A} = V'$).

Es ist unmittelbar klar, daß die Menge $\mathfrak{T}^*$ eine Gruppe bildet, wenn $\mathfrak{T}$ eine Gruppe ist, und umgekehrt. Wir betrachten weiterhin die Abbildungen

$$\bar{\omega}_A = \sigma_{O'}\sigma_{\bar{A}}^{-1} \quad \textit{und} \quad \bar{\omega}_A^* = \varphi_Z\varphi_{\bar{A}}^{-1} \quad \textit{für } A \neq O, U \textit{ auf } x$$

der Geraden x auf sich. Ist $O'\varphi_Z^{-1} = E$, so gilt für sie

$$E\bar{\omega}_A = A,\ O\bar{\omega}_A = O,\ U\bar{\omega}_A = U;\ E\bar{\omega}_A^* = A,\ O\bar{\omega}_A^* = O,\ U\bar{\omega}_A^* = U.$$

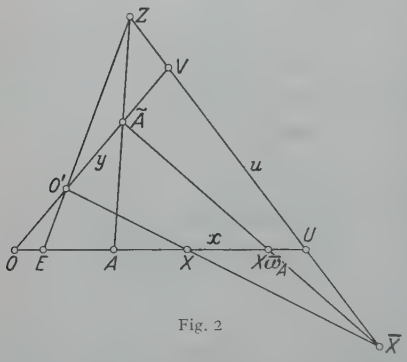

Fig. 2

Zu jedem $A \neq O, U$ auf x gibt es eineindeutig eine Abbildung $\bar{\omega}_A$ und eineindeutig eine Abbildung $\bar{\omega}_A^*$. Die Menge der Abbildungen $\bar{\omega}_A$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{H}$, die der Abbildungen $\bar{\omega}_A^*$ mit $\mathfrak{H}^*$. $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}^*$ sind jede genau einfach transitiv auf der Menge der Punkte $\neq O, U$ auf x. Es gilt auch hier

$$(9) \qquad X\bar{\omega}_A = A\bar{\omega}_X^* \textit{ für } A, X \neq O, U \textit{ auf } x.$$

Wir definieren für die Abbildungen $\bar{\omega}_A$ analog wie für die Abbildungen $\bar{\tau}_A$ eine Verknüpfung, die nicht notwendig das Hintereinanderausführen der Abbildungen $\bar{\omega}_A$ darstellt:

$$(10) \qquad \bar{\omega}_A \cdot \bar{\omega}_B = \bar{\omega}_C \quad \textit{mit} \quad C = E\bar{\omega}_A\bar{\omega}_B = A\bar{\omega}_B.$$

Es gilt dann entsprechend wie für die Menge $\mathfrak{T}$ das

Lemma 6. *Die Menge $\mathfrak{H}$ bildet hinsichtlich der Verknüpfung* (10) *ein Loop.*

Das neutrale Element ist dabei die identische Abbildung $\bar{\omega}_E$ von x auf sich.

Weiter schließt man wie oben, daß $\mathfrak{H}$ genau dann eine Gruppe bildet, wenn die Verknüpfung (10) dem Hintereinanderausführen der Abbildungen $\bar{\omega}_A$ entspricht. Ferner ergibt sich auch hier im Falle, daß $\mathfrak{H}$ eine Gruppe ist, die Gleichung

$$(11) \qquad \bar{\omega}_A\bar{\omega}_B^* = \bar{\omega}_B^*\bar{\omega}_A \qquad \textit{für } A, B \neq O, U \textit{ auf } x.$$

Für das Zusammensetzen der Abbildungen $\in \mathfrak{T}$ und $\in \mathfrak{H}$ gilt folgende, später verwendete Tatsache: Dann und nur dann gibt es zu jedem Punkt P mit $P \nmid u$, x Elemente $\bar{\tau}_X, \bar{\omega}_Y$ mit

$$(12) \qquad \sigma_{O'}\sigma_P^{-1} = \bar{\omega}_Y\bar{\tau}_X,$$

wenn die Abbildungen $\bar{\tau}_A$ unabhängig von der Wahl von $\bar{z}$ durch U sind. Denn sind die Abbildungen $\bar{\tau}_A$ unabhängig von der Wahl von $\bar{z}$, so gilt für $z = (P, U)$, $Y = (z, y)\varphi_Z^{-1}$, $X = P\varrho_z^{-1}$ ersichtlich $\bar{\omega}_Y = \sigma_{O'}\sigma_{\bar{Y}}^{-1}$ und $\bar{\tau}_X = \sigma_{\bar{Y}}\sigma_P^{-1}$,

also (12), und umgekehrt folgt aus (12) $\bar{\tau}_X = \sigma_{\bar{Y}} \cdot \sigma_P^{-1}$, also die genannte Unabhängigkeit.

Wir wollen nun untersuchen, welche weitergehenden Aussagen sich über die Abbildungen $\bar{\tau}_A$, $\bar{\omega}_A$ ergeben, wenn wir die Existenz spezieller perspektiver Kollineationen fordern. Als erstes behandeln wir das Axiom

P4. *Die Gruppe $\mathfrak{P}_{Uu}$ ist linear transitiv.*

Es gibt dann zu jedem $A \neq U$ auf x eine und nur eine Translation $\tau \in \mathfrak{P}_{Uu}$ mit $O\tau = A$. Diese bezeichnen wir mit τ_A. Man hat dann

$$X \tau_A = X \bar{\tau}_A \qquad \text{für alle } X \mathrel{I} x, \tag{13}$$

$$X \tau_A \tau_B = X \bar{\tau}_A \circ \bar{\tau}_B \qquad \text{für alle } X \mathrel{I} x. \tag{14}$$

Letzteres folgt aus $O \tau_A \tau_B = A \tau_B = O \bar{\tau}_A \circ \bar{\tau}_B$ und nach Gl. (13). Mithin bilden die Abbildungen $\bar{\tau}_A$ bei Voraussetzung von Axiom P4 eine Gruppe. Außerdem aber sieht man ohne weiteres, daß die Abbildungen $\bar{\tau}_A$ dann unabhängig sind von der Wahl der Geraden $\bar{z}$ durch U, denn wie auch immer man die Gerade $\bar{z} \neq u, x$ gewählt hat, stets muß Gl. (13) gelten, wodurch $\bar{\tau}_A$ als Abbildung der Geraden x auf sich eindeutig festgelegt ist.

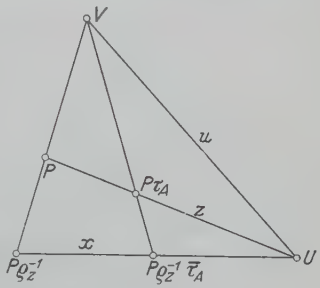

Fig. 3

Wir wollen nun zeigen, daß es umgekehrt zu jeder Abbildung $\bar{\tau}_A \in \mathfrak{T}$ eine Translation $\tau_A \in \mathfrak{P}_{Uu}$ gibt, in die sie eingebettet werden kann, wenn die Abbildungen $\bar{\tau}_A$ Gruppeneigenschaft und die eben genannte Unabhängigkeit besitzen. Wir definieren dazu τ_A vorerst als eineindeutige Abbildung der Menge der Punkte auf sich durch

$$P \tau_A = P \varrho_z^{-1} \bar{\tau}_A \varrho_z \qquad \text{für } P \nmid u \text{ und } z = (P, U)$$

$$P \tau_A = P \qquad \text{für } P \mathrel{I} u.$$

Zu zeigen ist, daß τ_A drei kollineare Punkte P_1, P_2, P_3 in drei kollineare Punkte überführt. Dies ist jedoch klar, wenn P_1, P_2, P_3 auf einer Geraden durch V, dem Zentrum der Perspektivität ϱ_z liegen. Ferner ergibt sich aus Gl. (8'), die aus der Gruppeneigenschaft von $\mathfrak{T}$ folgt, wegen der Unabhängigkeit der Abbildungen $\in \mathfrak{T}$ von der Wahl von $\bar{z}$

$$P \varrho_{V'z}^{-1} \bar{\tau}_A \varrho_{V'z} = P \varrho_{V'z}^{-1} \bar{\tau}_A \varrho_{V'z} \qquad \text{mit bel. } V' \neq U \text{ auf } u,$$

d.h. die Definition von τ_A ist unabhängig von der Wahl des Zentrums V' der Perspektivität von x auf z, wenn nur V' auf u liegt. Hieraus folgt sofort die Behauptung auch für Punkte P_i $(i = 1, 2, 3)$, die auf einer Geraden durch einen beliebigen Punkt $V' \neq U$ auf u liegen. Da endlich die Punkte auf einer Geraden z mit $z \mathrel{I} U$ offenbar in Punkte auf z abgebildet werden, ist τ_A eine Kollineation, die u punktweise und U geradenweise festläßt, mithin eine Translation $\in \mathfrak{P}_{Uu}$, die natürlich mit $\bar{\tau}_A$ auf x übereinstimmt. Damit ist bewiesen der

Satz 4. *In einer projektiven Ebene gilt Axiom* P 4 *genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Das Loop* $\mathfrak{T}$ *ist eine Gruppe.*
2. *Die Elemente* $\in \mathfrak{T}$ *sind unabhängig von der Wahl von* $\bar{z}$ *durch* U.

Die Abbildungen

$$\bar{\tau}'_P = \sigma_{O'}^{-1}\sigma_{P'} \quad \textit{für jedes } P \neq U \textit{ auf } u \textit{ mit } P' = P\pi_{u\,O\,\bar{z}}$$

sind projektive Abbildungen der Geraden u auf sich, für die

$$V\bar{\tau}'_P = P, \qquad U\bar{\tau}'_P = U$$

gilt. Sie entsprechen genau den Abbildungen $\bar{\tau}_A$ der Geraden x auf sich. Die Menge der Abbildungen $\bar{\tau}'_P$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{T}'$. Zu jedem $\bar{\tau}'_P$ gibt es ein und nur ein Element $\bar{\tau}_A \in \mathfrak{T}$ mit

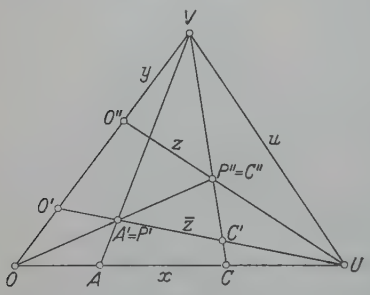

Fig. 4

$$\bar{\tau}'^{-1}_P = \sigma_{O'}^{-1}\bar{\tau}_A\sigma_{O'}, \tag{15}$$

denn setzt man $P'\varrho_V^{-1} = A$, so gilt für dies A Gl. (15). Mithin bildet $\mathfrak{T}'$ eine Gruppe (hinsichtlich des Hintereinanderausführens der Abbildungen), wenn $\mathfrak{T}$ eine Gruppe ist, und umgekehrt.

Sind nun die Abbildungen $\bar{\tau}'_P$ von der Wahl von $\bar{z}$ unabhängig, d.h. ist z eine beliebige Gerade $\neq x, u$ durch U und gilt

$$\bar{\tau}'_P = \sigma_{O''}^{-1}\sigma_{P''} \tag{16}$$

mit $O'' = V\pi_{u\,O\,z}$ und $P'' = P\pi_{u\,O\,z}$, so gibt es dann und nur dann eine Abbildung $\bar{\tau}_C \in \mathfrak{T}$ mit

$$\bar{\tau}'^{-1}_P = \sigma_{O''}^{-1}\bar{\tau}_C\sigma_{O''}, \tag{17}$$

wenn auch die Abbildungen $\bar{\tau}_A$ von $\bar{z}$ unabhängig sind, wenn also auch

$$\bar{\tau}_C = \sigma_{O''}\sigma_{C''}^{-1} \quad \textit{mit } C'' = C\,\varrho_z \tag{18}$$

gilt (man setze nämlich $C = P''\varrho_z^{-1}$, also $P'' = C''$).

Aus (15) und (17) folgt nun sofort

$$\sigma_{O''}\sigma_{O'}^{-1}\bar{\tau}_A\sigma_{O'}\sigma_{O''}^{-1} = \bar{\tau}_C, \quad \textit{also} \quad \bar{\omega}_B^{-1}\bar{\tau}_A\bar{\omega}_B = \bar{\tau}_C$$

mit $B = O''\varphi_{\bar{z}}^{-1}$, also $O'' = \tilde{B}$. Da nun $O\bar{\omega}_B^{-1}\bar{\tau}_A\bar{\omega}_B = A\bar{\omega}_B$ ist, gilt

$$\bar{\omega}_B^{-1}\bar{\tau}_A\bar{\omega}_B = \bar{\tau}_{A\bar{\omega}_B} \quad \textit{für alle } \bar{\tau}_A \in \mathfrak{T},\ \bar{\omega}_B \in \mathfrak{H}. \tag{19}$$

Umgekehrt folgt aus (19) und (18) wegen (15) sofort (16), d.h. wir haben bewiesen:

Lemma 7. *Gelten von den drei Forderungen*

1. *Die Elemente von* $\mathfrak{T}$ *sind von der Wahl von* $\bar{z}$ *unabhängig.*
2. *Die Elemente von* $\mathfrak{T}'$ *sind von der Wahl von* $\bar{z}$ *unabhängig.*

3. *Es gilt* $\overline{\omega}_B^{-1}\,\overline{\tau}_A\,\overline{\omega}_B = \overline{\tau}_{A\,\overline{\omega}_B}$ *für alle* $\overline{\tau}_A \in \mathfrak{T}$, $\overline{\omega}_B \in \mathfrak{H}$. *zwei, so auch die dritte.*

Betrachten wir nun das Axiom

P5. *Die Gruppe* $\mathfrak{P}_{U\,x}$ *ist linear transitiv.*

Dann kann man wie für Satz 4 zeigen:

Satz 5. *In einer projektiven Ebene gilt Axiom* P5 *genau dann, wenn die Abbildungen* $\overline{\tau}'_P$ *eine Gruppe bilden und unabhängig von der Wahl von* $\overline{z}$ *sind.*

Zusammen mit Lemma 7 ergibt dieser Satz sofort den weiteren:

Satz 6. *Unter Voraussetzung von* P4 *gilt Axiom* P5 *in einer projektiven Ebene genau dann, wenn Gl.* (19) *richtig ist.*

Denn gilt P4, so ist nach Satz 4 $\mathfrak{T}$ eine Gruppe, also auch $\mathfrak{T}'$. Ferner sind dann die Abbildungen $\overline{\tau}_A$ unabhängig von der Wahl von $\overline{z}$ und somit muß nach Lemma 7 und Satz 5 Axiom P5 gelten, wenn Gl. (19) richtig ist, und umgekehrt folgt aus P5 nach Satz 5 und Lemma 7, daß (19) gültig ist.

Wir betrachten nun das Axiom

P6. *Die Gruppe* $\mathfrak{P}_{V\,u}$ *ist linear transitiv.*

Dann gilt ein Satz 6 entsprechender

Satz 7. *Unter Voraussetzung von* P4 *gilt* P6 *genau dann, wenn die Gleichung gilt:*

$$(20)\quad \begin{cases} \overline{\omega}_B^{*-1}\,\overline{\tau}_A\,\overline{\omega}_B^{*} = \overline{\tau}_{A\,\overline{\omega}_B^{*}} \\ \text{für alle } \overline{\tau}_A \in \mathfrak{T},\ \overline{\omega}_B^{*} \in \mathfrak{H}^{*}. \end{cases}$$

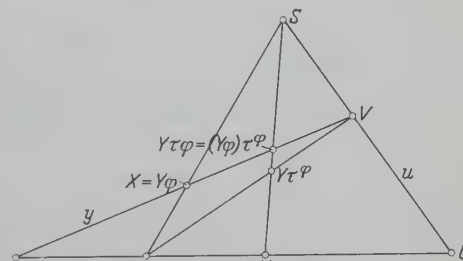

Fig. 5

Beweis. (a) Sei $\mathfrak{P}_{V\,u}$ linear transitiv und $\tau \in \mathfrak{P}_{U\,u}$ und φ eine Perspektivität $\pi_{x\,S\,y}$ mit $S \mathrel{I} u$, dann bezeichnen wir die Translation $\in \mathfrak{P}_{V\,u}$, die O in $(O\tau)\varphi$ überführt mit τ^{φ}. Wegen $(O\tau)\,\tau^{-1}\tau^{\varphi} = O\tau^{\varphi} = (O\tau)\,\varphi$ ist $\tau^{-1}\tau^{\varphi} \in \mathfrak{P}_{S\,u}$. Ist nun Y ein Punkt $\neq U$ auf x, so muß daher $Y\tau^{\varphi} = (Y\tau)\,\tau^{-1}\tau^{\varphi}$ auf $(Y\tau, S)$ liegen. Da $Y\tau^{\varphi}$ natürlich auch auf (Y, V) liegt, muß $Y\tau^{\varphi} = (Y, V) \cdot (Y\tau, S)$ und daher $(Y\varphi)\,\tau^{\varphi} = (Y\tau)\,\varphi$ sein. Setzt man nun $X = Y\varphi$, so erhält man sofort

$$(21)\qquad X\varphi^{-1}\tau\varphi = X\tau^{\varphi} \quad \textit{für bel. } \tau \in \mathfrak{P}_{U\,u} \textit{ und } X \mathrel{I} y.$$

Die Abbildung $\tau \leftrightarrow \tau^{\varphi}$ ist also ein Isomorphismus von $\mathfrak{P}_{U\,u}$ auf $\mathfrak{P}_{V\,u}$. Da nun $\overline{\omega}_B^{*} = \varphi_Z\varphi_{\overline{B}}^{-1}$ gilt, folgt aus (21) zunächst $X\varphi_Z^{-1}\tau_A\varphi_Z = X\tau_{A\,\varphi_Z}$ für alle X auf y und weiter aus (21) $X\varphi_{\overline{B}}^{-1}\tau_{A\,\varphi_Z\varphi_{\overline{B}}^{-1}}\varphi_{\overline{B}} = X\tau_{A\,\varphi_Z}$ für alle X auf y, also $X\varphi_B\tau_{A\,\varphi_Z}\varphi_{\overline{B}}^{-1} = X\tau_{A\,\overline{\omega}_B^{*}}$ mit $X \mathrel{I} x$, woraus sich

$$(22)\quad X\overline{\omega}_B^{*-1}\tau_A\overline{\omega}_B^{*} = X\tau_{A\,\overline{\omega}_B^{*}} \quad \textit{für alle } X \textit{ auf } x \textit{ und } A, B \neq U, O \textit{ auf } x,$$

und mit (13) die Gl. (20) ergibt.

(b) Sei Gl. (20) gültig. Dann konstruieren wir eine Translation $\tau' \in \mathfrak{P}_{V\,u}$, die O in einen beliebigen Punkt A' auf y überführt, indem wir definieren

$$P\tau' = P\overline{\varphi}^{-1}\overline{\tau}_A^{*}\overline{\varphi} \quad \textit{für } P \not\mathrel{I} u$$
$$P\tau' = P \quad \textit{für } P \mathrel{I} u,$$

wobei $A = A'\varphi_Z^{-1}$, $\bar{\varphi} = \pi_{x\,Z\,\bar{y}}$ mit $\bar{y} = (P, V)$ ist. Wie im Beweis zu Satz 4 ergibt sich die Tatsache, daß τ' Kollineation ist, aus der „Unabhängigkeitsaussage“:

$$P\,\bar{\varphi}^{-1}\,\bar{\tau}_A^*\,\bar{\varphi} = P\,\bar{\varphi}'^{-1}\,\bar{\tau}_{A\bar{\omega}^*}^*\,\bar{\varphi}', \tag{23}$$

wo $\bar{\varphi}' = \pi_{x\,Z'\,\bar{y}}$ mit $Z' \neq U$, V auf u und $\bar{\omega}^* = \varphi_Z\varphi_{Z'}^{-1}$ ist. Diese erschließt man wie folgt: Aus (20) ergibt sich, wenn zur Abkürzung $\varphi_Z = \varphi$ und $\varphi_{Z'} = \varphi'$ gesetzt wird,

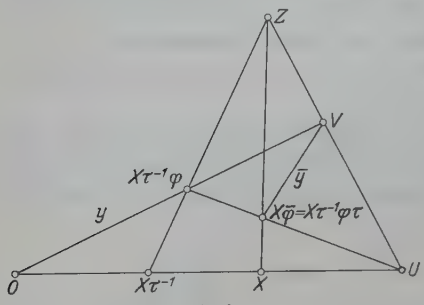

Fig. 6

$$X\varphi^{-1}\tau_S\varphi = X\varphi'^{-1}\tau_{S\bar{\omega}^*}\varphi'$$
$$\text{für}\quad S\,\mathrm{I}\,x;\quad X\,\mathrm{I}\,y;\quad S\,\not\mathrm{I}\,u,$$

und daher — für $S = P\varphi^{-1}$ und $X = A\varphi$ — $(A\varphi)\varphi^{-1}\tau_{P\varphi^{-1}}\varphi = (A\varphi)\varphi'^{-1}\tau_{P\varphi'^{-1}}\varphi'$, also

$$P\varphi^{-1}\,\bar{\tau}_A^*\,\varphi = P\varphi'^{-1}\,\bar{\tau}_{A\bar{\omega}^*}^*\,\varphi', \tag{24}$$

mithin Gl. (23) für $P\,\mathrm{I}\,y$. Ist nun $P\,\mathrm{I}\,\bar{y}$ und τ die Translation $\in \mathfrak{P}_{U\,u}$, die y in $\bar{y}$ überführt, so gilt offenbar $\bar{\varphi} = \tau^{-1}\varphi\tau$ (s. Fig. 6) und auch $\bar{\varphi}' = \tau^{-1}\varphi'\tau$. Daher ist wegen (8) und (24):

$$P\bar{\varphi}^{-1}\,\bar{\tau}_A^*\,\bar{\varphi} = P\tau^{-1}\varphi^{-1}\tau\bar{\tau}_A^*\tau^{-1}\varphi\tau = P\tau^{-1}\varphi^{-1}\,\bar{\tau}_A^*\,\varphi\tau = P\tau^{-1}\varphi'^{-1}\,\bar{\tau}_{A\bar{\omega}^*}^*\,\varphi'\tau$$
$$= P\tau^{-1}\varphi'^{-1}\tau\,\bar{\tau}_{A\bar{\omega}^*}^*\tau^{-1}\varphi'\tau = P\,\bar{\varphi}'^{-1}\,\bar{\tau}_{A\bar{\omega}^*}^*\bar{\varphi}',$$

also gilt Gl. (23).

Daß $\tau' \in \mathfrak{P}_{V\,u}$ mit $O\tau' = A'$ gilt, ist nach Definition klar, und damit ist Satz 7 bewiesen.

Zum Schluß dieses Paragraphen wollen wir den Beweis, daß die Gültigkeit von Axiom P4 und P5 das Bestehen der Gl. (19) zur Folge hat, noch einmal entsprechend dem Teil (a) des Beweises von Satz 7 führen, da die dabei verwendeten Schlüsse später noch einmal benutzt werden.

Seien also die Gruppen $\mathfrak{P}_{U\,u}$ und $\mathfrak{P}_{U\,x}$ linear transitiv, und σ eine Perspektivität $\pi_{x\,A\,u}$, dann bezeichnen wir mit τ^σ für $\tau \in \mathfrak{P}_{U\,u}$ die Translation $\in \mathfrak{P}_{U\,x}$, die den Punkt $O\sigma$ in den Punkt $(O\tau)\sigma$ überführt. Wir behaupten dann:

(i) *Ist* $(A, U) = z$, *so ist* $\tau\tau^\sigma \in \mathfrak{P}_{U\,z}$ *für jedes* $\tau \in \mathfrak{P}_{U\,u}$.

Beweis. Da $(O\tau)\tau^\sigma = O\tau$ und $(O\sigma)\tau\tau^\sigma = (O\sigma)\tau^\sigma = (O\tau)\sigma$ ist, geht $(O, O\sigma) = g$ bei $\tau\tau^\sigma$ in $\big(O\tau, (O\tau)\sigma\big) = h$ über. Der Schnittpunkt A der Geraden g mit ihrer Bildgeraden h liegt aber auf der Achse von $\tau\tau^\sigma$, also hat $\tau\tau^\sigma$ z als Achse.

(ii) *Ist* $\tau \in \mathfrak{P}_{U\,u}$, *so gilt* $X\sigma^{-1}\tau\sigma = X\tau^\sigma$ *für alle* X *auf* u.

Beweis. Sei $Y = X\sigma^{-1}$, so schneiden sich $(Y, Y\sigma)$ und $\big(Y\tau, (Y\tau)\sigma\big)$ in A. Wegen $Y\tau\tau^\sigma = Y\tau$ und (i) ist dann $(Y, Y\sigma)\tau\tau^\sigma = \big(Y\tau, (Y\tau)\sigma\big)$, woraus $(Y\sigma)\tau\tau^\sigma = Y\sigma\tau^\sigma = (Y\tau)\sigma$, mithin $X\tau^\sigma = X\sigma^{-1}\tau\sigma$ folgt.

Zweimaliges Anwenden von (ii) liefert dann Gl. (19).

§ 4. Einführung von Koordinaten

Für das Folgende setzen wir voraus, daß die Gruppe $\mathfrak{P}_{U\,u}$ linear transitiv ist.

Ist $\overline{\omega}$ ein Element von $\mathfrak{H}$ und τ eine Translation $\in \mathfrak{P}_{U\,u}$, so gibt es wegen der linearen Transitivität von $\mathfrak{P}_{U\,u}$ eine Translation $\in \mathfrak{P}_{U\,u}$, die den Punkt O in den Punkt $(O\,\tau)\,\overline{\omega}$ überführt. Wir bezeichnen diese mit $\tau^{\overline{\omega}}$. Jedes Element aus $\mathfrak{H}$ induziert somit eine eineindeutige Abbildung $\tau \leftrightarrow \tau^{\overline{\omega}}$ der Gruppe $\mathfrak{P}_{U\,u}$ auf sich, wobei verschiedene Elemente $\in \mathfrak{H}$ auch verschiedene Abbildungen induzieren, da aus $(O\,\tau)\,\overline{\omega} = (O\,\tau)\,\overline{\omega}'$ sofort $\overline{\omega} = \overline{\omega}'$ folgt. Die Menge dieser Abbildungen, samt dem Endomorphismus 0, der alle Elemente $\in \mathfrak{P}_{U\,u}$ in das Einselement abbildet, bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}$, deren Elemente mit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.

Da das Loop $\mathfrak{H}$ genau einfach transitiv auf der Menge der Punkte $\neq O, U$ auf x ist, gilt:

(*) Sind $\tau \neq 1$ und τ' zwei Translationen $\in \mathfrak{P}_{U\,u}$, so gibt es ein und nur ein $\alpha \in \mathfrak{A}$ mit $\tau^{\alpha} = \tau'$.

Im folgenden bezeichnet τ, wenn nicht anders bemerkt, stets die Translation $\in \mathfrak{P}_{U\,u}$, welche den Punkt O in den Punkt E überführt. Wir definieren dann für die Elemente $\in \mathfrak{A}$ eine Addition und eine Multiplikation durch

$$(**) \qquad \begin{cases} \tau^{\alpha+\beta} = \tau^{\alpha}\tau^{\beta} \\ \tau^{\alpha\cdot\beta} = (\tau^{\alpha})^{\beta}. \end{cases}$$

Dies bedeutet: $\alpha + \beta$ ist das nach (*) existierende und eindeutig bestimmte Element $\in \mathfrak{A}$, das die Translation τ in die Translation $\tau^{\alpha}\tau^{\beta}$ überführt, und $\alpha \cdot \beta$ ist das nach (*) existierende und eindeutig bestimmte Element $\in \mathfrak{A}$, das τ in $(\tau^{\alpha})^{\beta}$ überführt[16]).

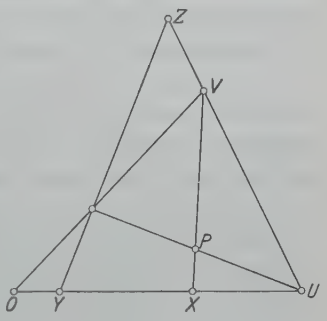

Fig. 7

Es ist klar, daß $\mathfrak{A}$ hinsichtlich der eingeführten Addition eine zu $\mathfrak{P}_{U\,u}$ isomorphe Gruppe und hinsichtlich der Multiplikation — ohne 0 natürlich — ein zu $\mathfrak{H}$ isomorphes Loop bildet. Ferner gilt $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha$ für alle $\alpha \in \mathfrak{A}$.

Wir wollen nun für die Punkte der projektiven Ebene (affine) Koordinaten einführen. Dazu zeichnen wir die Gerade u als uneigentliche Gerade aus und wählen die Geraden x und y aus § 3 als Koordinatenachsen. Sei dann P ein Punkt mit $P \nmid u$ und $z = (P, U)$, ferner $X = P\varrho_z^{-1}$ und $Y = (z, y)\varphi_Z^{-1}$, dann gibt es wegen (*) Elemente $\xi, \eta \in \mathfrak{A}$ mit $\tau^{\xi} = \tau_X$ und $\tau^{\eta} = \tau_Y$. ξ und η heißen die Koordinaten von P. Damit ist jedem Punkt P mit $P \nmid u$ eineindeutig ein geordnetes Paar (ξ, η) von Koordinaten zugeordnet.

Eine Gerade g mit $g \nmid U$ läßt sich dann durch eine lineare Gleichung beschreiben, denn sei $g \cdot x = B$ und $(g, u)\sigma_O^{-1} = A$, so gilt wegen (12) $A\overline{\omega}_Y\tau_X = B$

[16]) Man beachte hierbei, daß das so definierte Multiplizieren von Abbildungen $\in \mathfrak{A}$ im allgemeinen nicht mit dem Hintereinanderausführen derselben übereinstimmt.

für alle Punkte auf g. Hieraus erhält man $O\,\tau_A\,\overline{\omega}_Y\,\tau_X = O\,\tau_B$, woraus sich $\tau_A^{\overline{\omega}_Y}\,\tau_X = \tau_B$, also, wenn α, β nach (*) durch $\tau_A = \tau^\alpha$ und $\tau_B = \tau^\beta$ bestimmt werden, $(\tau^\alpha)^\eta\,\tau^\xi = \tau^\beta$ oder $\alpha \cdot \eta + \xi = \beta$ ergibt. Mithin erfüllen die Koordinaten ξ, η aller Punkte P auf g die Gleichung

$$\alpha \cdot \eta + \xi = \beta. \tag{25}$$

Die Koordinaten ξ, η der Punkte auf einer Geraden g mit $g \,\mathrm{I}\, U$ erfüllen natürlich die Gleichung $\eta = \beta$.

Da in der projektiven Ebene zwei verschiedene Geraden einen und nur einen Schnittpunkt und zwei verschiedene Punkte eine und nur eine Verbindungsgerade besitzen, folgen aus den Geradengleichungen (25) die Auflösbarkeitsbedingungen

A 1. *Die Gleichung* $\alpha \cdot \eta - \beta \cdot \eta = \gamma$ *für* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{A}$ *und* $\alpha \neq \beta$ *besitzt eine eindeutige Lösung* η *in* $\mathfrak{A}$.

A 2. *Die Gleichung* $-\xi \cdot \alpha + \xi \cdot \beta = \gamma$ *für* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{A}$ *und* $\alpha \neq \beta$ *besitzt eine eindeutige Lösung* ξ *in* $\mathfrak{A}$.

Ein algebraisches System $\mathfrak{C}$, in dem eine Addition und eine Multiplikation erklärt ist und das hinsichtlich der Addition eine Gruppe (mit 0 als neutralem Element), hinsichtlich der Multiplikation (ohne 0) aber ein Loop bildet und in dem $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha$ für alle $\alpha \in \mathfrak{C}$ und die Auflösbarkeitsforderungen A 1 und A 2 gelten, bezeichnen wir als ein cartesisches Zahlensystem[17]). Mit dem oben Bewiesenen ist also gezeigt, daß die Menge $\mathfrak{A}$, die wir aus der projektiven Ebene Π gewonnen haben, ein cartesisches Zahlensystem ist. Wir bezeichnen es mit $\mathfrak{C}(\Pi)$.

Ist umgekehrt ein cartesisches Zahlensystem $\mathfrak{C}$ gegeben, so läßt sich aus $\mathfrak{C}$ in gewohnter Weise eine affine Ebene gewinnen. Man faßt nämlich jedes geordnete Paar (x, y) mit $x, y \in \mathfrak{C}$ als Punkt auf und definiert als Geraden einmal jede Menge $g(a, b)$ von Punkten (x, y) mit $a\,y + x = b$ $[a, b \in \mathfrak{C}]$ und zum anderen jede Menge $g(b)$ von Punkten (x, y) mit $y = b$. Die Inzidenz übersetzt sich dann in die $\in$-Relation. Ferner heißt eine Gerade $g(a, b)$ zu einer Geraden $g(a', b')$ parallel, wenn $a = a'$ ist, und außerdem jede Gerade $g(b)$ zu jeder Geraden $g(b')$ parallel. Die affinen Inzidenzaxiome folgen dann ohne jede Mühe aus den algebraischen Eigenschaften von $\mathfrak{C}$.

Fassen wir dann jedes Büschel paralleler Geraden als Punkte einer uneigentlichen Geraden auf, so entsteht aus der affinen Ebene eine projektive Ebene, die wir die projektive Koordinatenebene über $\mathfrak{C}$ nennen und mit $\Pi(\mathfrak{C})$ bezeichnen wollen.

Erklärt man nun in $\Pi(\mathfrak{C})$ die Abbildungen $\overline{\tau}_A, \overline{\omega}_A$ in bezug auf das Koordinatensystem von $\Pi(\mathfrak{C})$, also mit x und y als den Koordinatenachsen, u als der uneigentlichen Geraden und endlich mit E und O' als den Punkten $(1, 0)$ und $(0, 1)$, so gilt

$$O\,\overline{\tau}_A\,\overline{\tau}_B = (a + b, 0);\ O\,\overline{\omega}_A\,\overline{\omega}_B = (a\,b, 0) \quad \textit{für} \quad A = (a, 0) \ \textit{und} \ B = (b, 0), \tag{26}$$

[17]) In [13] cartesische Gruppe genannt.

denn es ist $(A, O') = (A, \bar{A}) = g(a, a)$ und $B' = (b, 1)$ und $\tilde{B} = (0, b)$, also $(\bar{A}, B') = g(a, a+b)$ und $(\bar{A}, \tilde{B}) = g(a, ab)$, woraus $A\,\bar{\tau}_B = (a+b, 0)$ und $A\,\bar{\omega}_B = (ab, 0)$, mithin (26) folgt.

Aus (26) folgt insbesondere, daß die Abbildungen $\bar{\tau}_A$ eine Gruppe bilden. Die Abbildungen $\bar{\tau}_A$ sind ferner unabhängig von der Wahl von $\bar{z}$ durch U, denn ist $P = (x, y)$ ein Punkt auf einer Geraden $g = g(a, b)$ $[g \nmid U]$, so gilt $ay + x = b$, also nach (26) $A\,\bar{\omega}_Y\,\bar{\tau}_X = B$, wenn $X = (x, 0)$ und $Y = (y, 0)$ ist. Da andererseits auch $A\,\sigma_{O'}\,\sigma_P^{-1} = B$ gilt, hat man $A\,\bar{\omega}_Y\,\bar{\tau}_X = A\,\sigma_0\,\sigma_P^{-1}$. Dies gilt jedoch für alle Geraden g durch P $[g \nmid U]$, also alle $A \neq U$ auf x, woraus $\bar{\omega}_Y\,\bar{\tau}_X = \sigma_{O'}\,\sigma_P^{-1}$, mithin nach S. 342 die Behauptung folgt.

Nach Satz 4 ist damit die Gruppe $\mathfrak{P}_{U\,u}$ linear transitiv. Die für $\mathfrak{P}_{U\,u}$ gebildete Menge $\mathfrak{A}$ muß dann nach dem oben Bewiesenen ein cartesisches Zahlensystem bilden, welches nach (26) isomorph zu $\mathfrak{C}$ ist. Wir können daher zusammengenommen als Satz formulieren:

Satz 8. (a) *Zu jedem cartesischen Zahlensystem $\mathfrak{C}$ gibt es eine projektive Koordinatenebene $\Pi(\mathfrak{C})$ über $\mathfrak{C}$, in der die Gruppe $\mathfrak{P}_{U\,u}$ linear transitiv ist, wenn u die uneigentliche Gerade und U der Schnittpunkt der x-Achse mit u ist.*

(b) *Jeder projektiven Ebene Π, in der es eine Gerade u und einen Punkt U auf u derart gibt, daß die Gruppe $\mathfrak{P}_{U\,u}$ linear transitiv ist, kann in der oben beschriebenen Weise ein cartesisches Zahlensystem $\mathfrak{C}(\Pi)$ — bezogen auf U, u — zugeordnet werden. Π ist dann darstellbar als projektive Koordinatenebene über $\mathfrak{C}(\Pi)$.*

(c) *Ist $\mathfrak{C}$ ein cartesisches Zahlensystem, $\Pi(\mathfrak{C})$ die nach* (a) *zu $\mathfrak{C}$ gehörige projektive Koordinatenebene, $\mathfrak{C}(\Pi(\mathfrak{C}))$ das nach* (b) *zu $\Pi(\mathfrak{C})$ gehörige cartesische Zahlensystem, so gilt $\mathfrak{C}(\Pi(\mathfrak{C})) \cong \mathfrak{C}$, wenn U, u in* (a) *und* (b) *die gleichen Elemente sind.*

Die Aussagen (a) und (b) in Satz 8 wollen wir in der kurzen Form zusammenfassen: *Eine projektive Ebene ist genau dann als projektive Koordinatenebene über einem cartesischen Zahlensystem darstellbar, wenn in ihr Axiom* P4 *gilt.*

Ersetzt man in den Entwicklungen dieses Paragraphen die Gruppe $\mathfrak{P}_{U\,u}$ durch die Menge $\mathfrak{T}$ und fordert die Unabhängigkeit der Elemente $\in \mathfrak{T}$ von der Wahl von $\bar{z}$, so sieht man, daß sich fast alles entsprechend definieren und beweisen läßt. Nur ist das algebraische System $\mathfrak{S}$, zu dem die analog definierte Menge $\mathfrak{A}$ durch Einführen der Verknüpfungen (**) wird, im allgemeinen hinsichtlich der Addition nicht mehr assoziativ, sondern bildet ein zu $\mathfrak{T}$ isomorphes Loop. Alle anderen Rechengesetze eines cartesischen Zahlensystems gelten auch in $\mathfrak{S}$ (wobei man allerdings die Auflösbarkeitsbedingungen in der ursprünglichen, direkt aus (25) folgenden Form stehen lassen muß, da das Assoziativgesetz der Addition in $\mathfrak{S}$ nicht notwendig gilt). Da sich über $\mathfrak{S}$ genau wie über $\mathfrak{C}$ eine projektive Koordinatenebene erklären läßt, hat man daher den Satz, daß sich eine projektive Ebene genau dann als projektive Koordinatenebene über einem solchen algebraischen System $\mathfrak{S}$ darstellen läßt, wenn die Abbildungen $\bar{\tau}_A$ unabhängig von der Wahl von $\bar{z}$ sind.

§ 5. Stufenaufbau der Begründung der projektiven Geometrie

Satz 8 kann man noch eine Reihe entsprechender Sätze an die Seite stellen, die ebenfalls projektive Ebenen, in denen geeignete Zusatzaxiome gelten, als projektive Koordinatenebenen über gewissen algebraischen Systemen kennzeichnen.

Setzen wir z.B. noch außer der Gültigkeit von P4 voraus, daß auch P5 erfüllt ist, so gilt nach Gl. (19): $\tau^{\bar\omega} = \bar\omega^{-1}\tau\bar\omega$ *für alle* $\tau \in \mathfrak{P}_{U\,u}$. Mithin ist die Abbildung $\tau \leftrightarrow \tau^{\bar\omega}$ *für alle* $\tau \in \mathfrak{P}_{U\,u}$ ein Automorphismus von $\mathfrak{P}_{U\,u}$, also sind alle Elemente von $\mathfrak{A}$ Endomorphismen der Gruppe $\mathfrak{P}_{U\,u}$. Dann aber läßt sich sofort die Gültigkeit des Linksdistributivgesetzes herleiten:

$$\tau^{(\alpha+\beta)\cdot\gamma} = (\tau^\alpha\tau^\beta)^\gamma = (\tau^\alpha)^\gamma(\tau^\beta)^\gamma = \tau^{\alpha\cdot\gamma}\tau^{\beta\cdot\gamma} = \tau^{\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma}.$$

Umgekehrt, gilt in $\mathfrak{A}$ das Linksdistributivgesetz, so ist jedes Element $\alpha \in \mathfrak{A}$ Endomorphismus, denn sind τ_1, τ_2 zwei Translationen $\in \mathfrak{P}_{U\,u}$, so gibt es nach (*) Elemente $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$ mit $\tau^\beta = \tau_1$ und $\tau^\gamma = \tau_2$, und es gilt

$$(\tau_1\tau_2)^\alpha = (\tau^\beta\tau^\gamma)^\alpha = (\tau^{\beta+\gamma})^\alpha = \tau^{\beta\cdot\alpha+\gamma\cdot\alpha} = \tau^{\beta\cdot\alpha}\tau^{\gamma\cdot\alpha} = (\tau^\beta)^\alpha(\tau^\gamma)^\alpha = \tau_1^\alpha\tau_2^\beta.$$

Damit ist die Abbildung $\tau \leftrightarrow \tau^{\bar\omega}$ [für alle $\tau \in \mathfrak{P}_{U\,u}$] für jedes $\bar\omega \in \mathfrak{H}$ ein Automorphismus von $\mathfrak{P}_{U\,u}$, für den wegen $X\tau\bar\omega = O\tau_X\tau\bar\omega = O(\tau_X\tau)^{\bar\omega} = O\tau_X^{\bar\omega}\tau^{\bar\omega} = X\bar\omega\tau^{\bar\omega}$ für alle X auf x gilt

$$\tau^{\bar\omega} = \bar\omega^{-1}\tau\bar\omega \qquad \textit{für alle } \tau \in \mathfrak{P}_{U\,u}.$$

Dies bedeutet aber, daß Gl. (19) gültig, also nach Satz 6, daß die Gruppe $\mathfrak{P}_{U\,x}$ linear transitiv ist. Bezeichnet man eine cartesische Gruppe, in der ein Distributivgesetz gilt, als ein Veblen-Wedderburn-System[18]) mit Links- bzw. Rechtsdistributivgesetz, so haben wir nach Satz 8 bewiesen:

Satz 9. *Eine projektive Ebene ist genau dann als projektive Koordinatenebene über einem Veblen-Wedderburn-System mit Linksdistributivgesetz darstellbar, wenn in ihr die Axiome* P4 *und* P5 *gelten.*

Welche Folgerungen für den Koordinatenbereich $\mathfrak{A}$ kann man nun ziehen, wenn statt P5 zusätzlich P6 gilt? Bezeichnen wir wie oben mit $\tau^{\bar\omega^*}$ für $\bar\omega^* \in \mathfrak{H}^*$ die Translation, die den Punkt O in den Punkt $(O\tau)\bar\omega^*$ überführt, so besitzt die Menge $\mathfrak{A}^*$ der eineindeutigen Abbildungen $\tau \leftrightarrow \tau^{\bar\omega^*}$ *für alle* $\tau \in \mathfrak{P}_{U\,u}$ der Gruppe $\mathfrak{P}_{U\,u}$ auf sich ebenfalls die Eigenschaft (*), wenn wir noch den Endomorphismus 0 hinzunehmen, denn auch die Menge $\mathfrak{H}^*$ ist genau einfach transitiv auf der Menge der Punkte $\neq O, U$ auf x.

Zu jedem $\alpha \in \mathfrak{A}$ gibt es daher genau ein $\alpha' \in \mathfrak{A}^*$ mit $\tau^\alpha = \tau^{\alpha'}$. Ferner hat $E\bar\omega_A\bar\omega_B = A\bar\omega_B = B\bar\omega_A^* = E\omega_B^*\bar\omega_A^*$ die Gleichung $(\tau^\alpha)^\beta = (\tau^{\beta'})^{\alpha'}$ zur Folge, wenn $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$; $\alpha', \beta' \in \mathfrak{A}^*$ und $\tau^\alpha = \tau^{\alpha'}$; $\tau^\beta = \tau^{\beta'}$ gilt.

Die Gültigkeit von Axiom P6 bedeutet nun wegen Gl. (20), daß $\tau^{\bar\omega^*} = \bar\omega^{*-1}\tau\bar\omega^*$ *für alle* $\tau \in \mathfrak{P}_{U\,u}$ gilt, also jedes Element $\neq 0$ aus $\mathfrak{A}^*$ Automorphismus

[18]) In [*13*] Quasikörper genannt.

der Gruppe $\mathfrak{P}_{Uu}$ ist. Daraus erschließen wir nun sofort das Rechtsdistributivgesetz:

$$\tau^{\alpha\cdot(\beta+\gamma)} = (\tau^{\alpha})^{\beta+\gamma} = (\tau^{(\beta+\gamma)'})^{\alpha'} = (\tau^{\beta+\gamma})^{\alpha'} = (\tau^{\beta})^{\alpha'}(\tau^{\gamma})^{\alpha'} = (\tau^{\beta'})^{\alpha'}(\tau^{\gamma'})^{\alpha'}$$
$$= (\tau^{\alpha})^{\beta}(\tau^{\alpha})^{\gamma} = \tau^{\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma}.$$

Hierbei sind $\alpha', \beta', (\alpha+\beta)'$ die Elemente aus $\mathfrak{A}^*$, für die $\tau^{\alpha} = \tau^{\alpha'}$, $\tau^{\beta} = \tau^{\beta}$ und $\tau^{(\alpha+\beta)'} = \tau^{(\alpha+\beta)}$ gilt.

Umgekehrt, gilt in $\mathfrak{A}$ das Rechtsdistributivgesetz, so müssen die Elemente $\in \mathfrak{A}^*$ Endomorphismen sein: Sind τ_1, τ_2 zwei Translationen $\in \mathfrak{P}_{Uu}$, so gibt es Elemente β, γ mit $\tau^{\beta} = \tau_1$ und $\tau^{\gamma} = \tau_2$. Daher gilt

$$(\tau_1\tau_2)^{\alpha'} = (\tau^{\beta}\tau^{\gamma})^{\alpha'} = (\tau^{\beta+\gamma})^{\alpha'} = (\tau^{(\beta+\gamma)'})^{\alpha'} = (\tau^{\alpha})^{\beta+\gamma}$$
$$= \tau^{\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma} = (\tau^{\alpha})^{\beta}(\tau^{\alpha})^{\gamma} = (\tau^{\beta'})^{\alpha'}(\tau^{\gamma'})^{\alpha'} = \tau_1^{\alpha'}\tau_2^{\alpha'}.$$

Entsprechend wie oben folgt dann, daß $\tau^{\bar{\omega}^*} = \bar{\omega}^{*-1}\tau\bar{\omega}^*$ *für alle* $\tau \in \mathfrak{P}_{Uu}$ ist, also Gl. (20) richtig ist, woraus man nach Satz 7 auf die lineare Transitivität von $\mathfrak{P}_{Vu}$ schließt. Damit ist gezeigt:

Satz 10. *Eine projektive Ebene ist genau dann als projektive Koordinatenebene über einem Veblen-Wedderburn-System mit Rechtsdistributivgesetz darstellbar, wenn in ihr die Axiome* P4 *und* P6 *gelten*[19]).

Aus (*) folgt im Fall, daß P4 und P5 bzw. P4 und P6 erfüllt sind, daß alle Translationen $\neq 1$ aus $\mathfrak{P}_{UU}$ bzw. aus $\mathfrak{P}_{uu}$ die gleiche Ordnung haben müssen, da dann alle Elemente $\neq 0$ von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{A}^*$ Automorphismen sind und außerdem jede Komponente von $\mathfrak{P}_{UU}$ bzw. $\mathfrak{P}_{uu}$ isomorph zu $\mathfrak{P}_{Uu}$ ist [s. (21) und (ii) aus § 3]. Die Ordnung der Translationen $\neq 1$ ist — falls endlich — gleich einer Primzahl p, denn jede Potenz einer Translation $\tau' \neq 1$ hat die gleiche Ordnung wie τ'.

Darüber hinaus gilt, wenn wir mit α_s den nach (*) existierenden und eindeutig bestimmten Endomorphismus $\in \mathfrak{A}$ bezeichnen, der τ (das festgewählte Element $\in \mathfrak{P}_{Uu}$) in τ^s (s ganze Zahl) überführt, der

Satz 11. *Gilt Axiom* P4 *und* P5, *so bildet die Menge* $\mathfrak{R}$ *der Endomorphismen* $\alpha_s\alpha_t^{-1}$ *von* $\mathfrak{P}_{Uu}$ *mit* $t \neq 0$ *in* $\mathfrak{A}$ *einen Körper, der isomorph zum Primkörper der Charakteristik* p *ist, wenn die Translationen* $\in \mathfrak{P}_{Uu}$ *die Ordnung* p *haben, oder isomorph zum Primkörper der Charakteristik* 0 *ist, wenn die Translationen* $\in \mathfrak{P}_{Uu}$ *nicht endliche Ordnung haben.*

Beweis. Zunächst gilt

$$\tau^{\alpha_s+\alpha_t} = \tau^{\alpha_s}\tau^{\alpha_t} = \tau^s\tau^t = \tau^{s+t} = \tau^{\alpha_{s+t}}$$
$$\tau^{\alpha_s\cdot\alpha_t} = (\tau^{\alpha_s})^{\alpha_t} = (\tau^s)^{\alpha_t} = (\tau^{\alpha_t})^s = (\tau^t)^s = \tau^{s\cdot t} = \tau^{\alpha_{st}},$$

[19]) Wir erwähnen noch, daß die Gültigkeit von P4 und P6 im Falle, daß es wenigstens eine nichtinvolutorische Translation $\neq 1$ gibt, gleichwertig mit der Forderung ist, daß es zu jedem Punkt P mit $P \not\mathrel{I} u$ eine involutorische Homologie σ mit P als Zentrum und u als Achse gibt. Dies ergibt sich sofort aus Satz 1, Folgerung 4 und der leicht zu beweisenden Tatsache, daß das Produkt zweier involutorischer Homologien mit gleicher Achse eine Translation ist. Vgl. [12], Teil I und [13], S. 210ff.

wobei außer den Definitionen von Summe und Produkt lediglich benutzt wird, daß α_t ein Endomorphismus ist. Hieraus folgt, daß die Endomorphismen $\alpha_s \in \mathfrak{A}$ einen Ring $\mathfrak{R}$ bilden, der isomorph zum Restklassenring mod p oder isomorph zum Ring der ganzen Zahlen ist, je nachdem die Ordnung der Translationen endlich (nämlich gleich p) oder nicht endlich ist. Da im ersten Fall jedes Element $\alpha_t \in \mathfrak{R}\ [t \neq 0]$ ein Inverses in $\mathfrak{R}$ besitzt, ferner aber das Inverse α_t^{-1} von α_t in $\mathfrak{R}$ eindeutig bestimmt ist, ist $\mathfrak{K} = \mathfrak{R}$ und unser Satz in diesem Fall bewiesen. Der allgemeine Beweis verläuft wie folgt:

(a) *Ist* $\alpha_s \in \mathfrak{R}$ *und sind* α, β *beliebige Elemente von* $\mathfrak{A}$, *so gilt* $(\alpha_s \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha_s \cdot (\beta \cdot \gamma)$. Denn es ist $\tau^{(\alpha_s \cdot \beta) \cdot \gamma} = \big((\tau^{\alpha_s})^{\beta}\big)^{\gamma} = \big((\tau^{s})^{\beta}\big)^{\gamma} = \big((\tau^{\beta})^{s}\big)^{\gamma} = \big((\tau^{\beta})^{\gamma}\big)^{s} = (\tau^{\beta \cdot \gamma})^{s} = (\tau^{s})^{\beta \cdot \gamma} = \tau^{\alpha_s \cdot (\beta \cdot \gamma)}$.

(b) *Ist* $\alpha_s \in \mathfrak{R}\ [s \neq 0]$ *und* β *ein beliebiges Element* $\in \mathfrak{A}$, *so gilt* $\alpha_s^{-1}(\alpha_s \beta) = \beta$. Sei nämlich $\alpha_s^{-1}(\alpha_s \beta) = \gamma$, dann ist nach (a): $\alpha_s[\alpha_s^{-1}(\alpha_s \beta)] = (\alpha_s \alpha_s^{-1})(\alpha_s \beta) = \alpha_s \beta$, also $\alpha_s \gamma = \alpha_s \beta$. Da $\mathfrak{A}$ ein Loop hinsichtlich der Multiplikation ist, folgt hieraus $\gamma = \beta$ und damit die Behauptung.

Nach (a) und (b) folgt aus $\alpha_t \alpha_q = \alpha_{tq}$ mit $t, q \neq 0$, also $(\alpha_t \alpha_q)\, \alpha_{tq}^{-1} = 1$, daß $\alpha_t^{-1} = \alpha_q \alpha_{tq}^{-1}$ und entsprechend $\alpha_q^{-1} = \alpha_t \alpha_{tq}^{-1}$ gilt. Somit ergibt sich nach (a) und wegen der Gültigkeit des einen Distributivgesetzes in $\mathfrak{A}$ [für $t, q \neq 0$]:

$$(27)\quad \begin{cases} \alpha_s \alpha_t^{-1} + \alpha_p \alpha_q^{-1} = \alpha_s(\alpha_q \alpha_{tq}^{-1}) + \alpha_p(\alpha_t \alpha_{tq}^{-1}) = (\alpha_s \alpha_q)\, \alpha_{tq}^{-1} + (\alpha_p \alpha_t)\, \alpha_{tq}^{-1} \\ \qquad = (\alpha_s \alpha_q + \alpha_p \alpha_t)\, \alpha_{tq}^{-1} = (\alpha_s \alpha_q + \alpha_p \alpha_t)\, (\alpha_t \alpha_q)^{-1}. \end{cases}$$

Ferner hat man nach (a), (b) und wegen $\alpha_p \alpha_q^{-1} = (\alpha_p \alpha_t)\, \alpha_{tq}^{-1} = \alpha_t(\alpha_p \alpha_{tq}^{-1})$:

$$(28)\quad \begin{cases} (\alpha_s \alpha_t^{-1})(\alpha_p \alpha_q^{-1}) = \alpha_s[\alpha_t^{-1}(\alpha_p \alpha_q^{-1})] = \alpha_s[\alpha_t^{-1}\{\alpha_t(\alpha_p \alpha_{tq}^{-1})\}] \\ \qquad = \alpha_s(\alpha_p \alpha_{tq}^{-1}) = (\alpha_s \alpha_p)\, \alpha_{tq}^{-1} = (\alpha_s \alpha_p)\, (\alpha_t \alpha_q)^{-1}. \end{cases}$$

(27) und (28) entnimmt man aber, daß $\mathfrak{K}$ isomorph zum Quotientenkörper von $\mathfrak{R}$ ist, womit alles bewiesen ist.

Satz 11 hat zur Folge, daß sich jedes Veblen-Wedderburn-System als Vektorraum über dem Primkörper der Charakteristik p bzw. 0 auffassen läßt.

Wir setzen nun den Stufenaufbau fort und betrachten das Axiom

P7. a) *Die Gruppe* $\mathfrak{P}_{Ou}$ *ist linear transitiv.* b) *Die Gruppe* $\mathfrak{P}_{Uu}$ *besteht nicht nur aus dem Einselement.*

Aus Axiom P7 folgt nach Lemma 4, daß die Gruppe $\mathfrak{P}_{xu}$ einfach transitiv ist, da die nach P7b existierende Translation $\neq 1$ aus $\mathfrak{P}_{Uu}$ eine Kollineation ist, die u aber nicht O festläßt. Insbesondere also ist $\mathfrak{P}_{Uu}$ linear transitiv. Weiter gilt:

Lemma 8. *Unter Voraussetzung von Axiom* P7 *gibt es zu zwei Translationen* $\tau, \tau' \neq 1$ *aus* $\mathfrak{P}_{Uu}$ *eine und nur eine Homologie* $\omega \in \mathfrak{P}_{Ou}$ *mit* $\omega^{-1} \tau \omega = \tau'$.

Beweis. Wegen der linearen Transitivität der Gruppe $\mathfrak{P}_{Ou}$ gibt es ein $\omega \in \mathfrak{P}_{Ou}$ mit $(O\tau)\omega = (O\tau')$, denn $O\tau, O\tau'$ sind von O und U verschieden. Für dieses ω gilt dann $O\omega^{-1}\tau\omega = O\tau\omega = O\tau'$ und daher, da sicher $\omega^{-1}\tau\omega \in \mathfrak{P}_{Uu}$ ist, nach Lemma 1 $\omega^{-1}\tau\omega = \tau'$. Gäbe es noch eine weitere Homologie $\omega' \in \mathfrak{P}_{Ou}$

mit $\omega'^{-1}\tau\omega' = \omega^{-1}\tau\omega$, so folgte aus $(O\tau)\omega' = O\omega'^{-1}\tau\omega' = O\omega^{-1}\tau\omega = (O\tau)\omega$ nach Lemma 1 $\omega' = \omega$.

Die Gruppe $\mathfrak{A}'$ der durch

$$\tau^{\psi} = \omega^{-1}\tau\omega \quad \tau \in \mathfrak{P}_{Uu},\ \omega \in \mathfrak{P}_{Ou}$$

definierten Automorphismen ψ der Gruppe $\mathfrak{P}_{Uu}$ samt dem Endomorphismus 0 hat also die Eigenschaft (*). Ist nun τ eine beliebige, aber fest gewählte Translation $\neq 1$ aus $\mathfrak{P}_{Uu}$ und definiert man mit diesem τ eine Addition und Multiplikation in $\mathfrak{A}'$ gemäß (**), so stimmt die Multiplikation mit dem Hintereinanderausführen der Endomorphismen überein, denn $\alpha \cdot \beta$ für $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}'$ ist der Endomorphismus, der die (festgewählte) Translation τ in $(\tau^{\alpha})^{\beta}$ überführt. Dieses tut aber auch der Endomorphismus $\alpha\beta$, der durch Hintereinanderausführen von α, β entsteht, und da $\alpha\beta \in \mathfrak{A}'$ ist, muß wegen (*) $\alpha \cdot \beta = \alpha\beta$ gelten. Also bildet $\mathfrak{A}'$ nicht nur hinsichtlich der Addition, sondern auch hinsichtlich der Multiplikation (ohne 0 natürlich) eine Gruppe. Diese ist selbstverständlich isomorph zu $\mathfrak{P}_{Ou}$. Da aus der Endomorphismeneigenschaft der Elemente $\in \mathfrak{A}'$ das eine Distributivgesetz folgt, ferner auch die Auflösbarkeitsbedingung A 2 gelten muß, bildet $\mathfrak{A}'$ hinsichtlich der eingeführten Verknüpfungen ein Veblen-Wedderburn-System mit Linksdistributivgesetz, in dem die Multiplikation assoziativ ist. Ein solches System nennt man einen Fastkörper (mit Linksdistributivgesetz)[20]. Der Koordinatenbereich, der zu einer projektiven Ebene gehört, in der Axiom P 7 gilt, ist also ein Fastkörper mit Linksdistributivgesetz.

Dieses Ergebnis, das wir hier direkt ableiteten, kann man natürlich auch leicht aus den vorher durchgeführten Entwicklungen entnehmen, denn bezeichnet ω_A die nach P 7 existierende Homologie $\in \mathfrak{P}_{Ou}$, die den Punkt E in den Punkt A überführt, so gilt analog zu (8) und (9):

$$X\omega_A = X\overline{\omega}_A \qquad \textit{für alle } X \textit{ auf } x, \tag{29}$$

$$X\omega_A\omega_B = X\overline{\omega}_A \cdot \overline{\omega}_B \qquad \textit{für alle } X \textit{ auf } x. \tag{30}$$

Wegen (29) ist dann aber $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$ und wegen (30) die Multiplikation in $\mathfrak{A}$ assoziativ.

Umgekehrt, ist ein Fastkörper $\mathfrak{F}$ gegeben, so gelten in der projektiven Koordinatenebene $\Pi(\mathfrak{F})$ über $\mathfrak{F}$ Axiom P 4 und P 5. Da $\mathfrak{F}$ (ohne Nullelement) nach (26) hinsichtlich der Multiplikation isomorph zu $\mathfrak{H}$ ist, bilden die Abbildungen $\overline{\omega}_A$ in $\Pi(\mathfrak{F})$ eine Gruppe. Wir zeigen nun, daß sich hieraus die lineare Transitivität der Gruppe $\mathfrak{P}_{Ou}$ ergibt.

Da die Gruppe $\mathfrak{P}_{UU}$ direktes Produkt der Gruppen $\mathfrak{P}_{Uu}$ und $\mathfrak{P}_{Ux}$ ist, läßt sich jedes Element $\tau \in \mathfrak{P}_{UU}$ eindeutig in der Form $\tau_1\tau_2$ mit $\tau_1 \in \mathfrak{P}_{Ux}$ und $\tau_2 \in \mathfrak{P}_{Uu}$ darstellen. Die Abbildung

$$\tau^{\psi} = \tau_1\tau_2^{\overline{\omega}} \qquad \textit{mit festem } \overline{\omega} \in \mathfrak{H}$$

[20]) In [13] assoziativer Quasikörper genannt. Die Definition eines Fastkörpers nach Zassenhaus [Über endliche Fastkörper. Abh. math. Seminar Univ. Hamburg **11**, 123—147 (1931)] enthält nicht die Auflösbarkeitsbedingungen A 1 und A 2.

ist dann ein Automorphismus von $\mathfrak{P}_{UU}$, da $\tau_2 \leftrightarrow \tau_2^{\bar{\omega}}$ ein Automorphismus von $\mathfrak{P}_{Uu}$ und die Gruppe $\mathfrak{P}_{UU}$ abelsch ist. Der Automorphismus ψ führt jede Komponente $\mathfrak{P}_{Uz}$ von $\mathfrak{P}_{UU}$ wieder in eine Komponente über, denn ist $z = u$ oder $z = x$, so ist die Behauptung richtig. Ist $z \neq x, u$ und $(z, y) = \widetilde{B}$, dann gilt offenbar für alle $\tau = \tau_1\tau_2 \in \mathfrak{P}_{Uz}$: $\tau_2 = \tau_1^{\sigma_{\widetilde{B}}^{-1}}$ (Bezeichnungen analog wie in § 3). Hieraus folgt $\tau^{\psi} = \tau_1 \tau_1^{\sigma_{\widetilde{B}}^{-1}\bar{\omega}}$. Wegen der Gruppeneigenschaft der Abbildungen $\bar{\omega}_A$ gibt es dann ein $\widetilde{C}$ mit $\sigma_{O'}\sigma_{\widetilde{B}}^{-1}\bar{\omega} = \sigma_{O'}\sigma_{\widetilde{C}}^{-1}$, also mit $\sigma_{\widetilde{B}}^{-1}\bar{\omega} = \sigma_{\widetilde{C}}^{-1}$. Also gilt $\tau^{\psi} = \tau_1\tau_1^{\sigma_{\widetilde{C}}^{-1}}$, woraus nach (i) am Schluß von § 2 die Behauptung folgt.

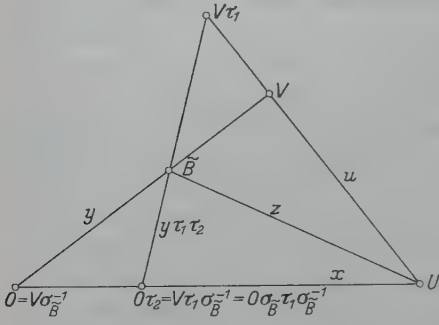

Fig. 8

Nach Satz 2, Folgerung 2′ gehört zu dem Automorphismus ψ eine Homologie mit u als Achse und O als Zentrum, wenn $p = p' = y$ gewählt wird, denn ψ führt $\mathfrak{P}_{Ux}$ elementweise in sich. Wegen der Transitivität der Abbildungen $\in \mathfrak{H}$ muß dann auch die Gruppe $\mathfrak{P}_{Ou}$ linear transitiv sein. Es gilt also der

Satz 12. *Eine projektive Ebene ist genau dann als Koordinatenebene über einem Fastkörper mit Linksdistributivgesetz darstellbar, wenn in ihr Axiom* P 7 *gilt.*

Satz 10 und Satz 12 ergeben bei Beachtung von Lemma 4 den

Satz 13. *Eine projektive Ebene ist genau dann als projektive Koordinatenebene über einem Schiefkörper darstellbar, wenn in ihr die Gruppe $\mathfrak{P}_{Ou}$ linear transitiv ist und die Gruppen $\mathfrak{P}_{Uu}$ und $\mathfrak{P}_{Vu}$ nicht nur aus dem Einselement bestehen.*

Gilt bei Voraussetzung von Axiom P 7 noch zusätzlich, daß die Gruppe $\mathfrak{P}_{Ou}$ abelsch ist, so ist klar, daß die Multiplikation in $\mathfrak{A}$ kommutativ ist, also $\mathfrak{A}$ ein kommutativer Körper ist. Umgekehrt folgt natürlich aus der Kommutativität in $\mathfrak{A}$, daß $\mathfrak{P}_{Ou}$ abelsch ist. Man kann also die projektiven Ebene über einem kommutativen Körper durch Axiom P 7 mit der zusätzlichen Forderung kennzeichnen, daß $\mathfrak{P}_{Ou}$ abelsch ist. Diese zusätzliche Forderung kann aber durch eine Existenzforderung ersetzt werden (s. Satz 14)[21]), nämlich das Axiom

P 8. *Es gibt eine perspektive Dualität δ mit O als Zentrum und u als Achse.*

Dem Beweis schicken wir folgendes Lemma voraus:

Lemma 9. *Ist die Gruppe $\mathfrak{P}_{vu}$ einfach transitiv und eine Komponente $\mathfrak{P}_{Ou}$ $[O \nmid u,\ O \mid v]$ abelsch, so ist jede Komponente von $\mathfrak{P}_{vu}$ und $\mathfrak{P}_{uv}$ abelsch.*

Beweis. Die Behauptung ist klar für alle Komponenten von $\mathfrak{P}_{vu}$, da diese — außer $\mathfrak{P}_{Uu}$ mit $U \mid u$ — durch innere Automorphismen von $\mathfrak{P}_{vu}$ auf $\mathfrak{P}_{Ou}$ abgebildet werden können. $\mathfrak{P}_{Uu}$ aber ist abelsch, weil nach Satz 1,

[21]) Vgl. BAER [4].

Folgerung 3 $\mathfrak{P}_{uv}$ einfach transitiv, also $\mathfrak{P}_{Uv}$ linear transitiv, mithin $\mathfrak{P}_{UU}$ einfach transitiv ist.

Seien nun π', π'' Elemente einer Komponente der Gruppe $\mathfrak{P}_{uv}$ und P ein beliebiger Punkt mit $P \nmid u, v$. Dann gibt es Elemente $\omega', \omega'' \in \mathfrak{P}_{vu}$ mit $P\omega' = P\pi'$ und $P\omega'' = P\pi''$. Da die Elemente $\in \mathfrak{P}_{uv}$ mit denen aus $\mathfrak{P}_{vu}$ kommutieren (vgl. Satz 1, Folgerung 3) und nach dem eben Bewiesenen auch ω', ω'' kommutieren, ergibt sich:

$$(P\pi')\pi'' = (P\omega')\pi'' = (P\pi'')\omega' = (P\omega'')\omega' = (P\omega')\omega'' = (P\pi')\omega''$$
$$= (P\omega'')\pi' = (P\pi'')\pi', \text{ also } \pi'\pi'' = \pi''\pi'.$$

Wir zeigen nun, daß bei Voraussetzung von Axiom P7 die Existenz einer perspektiven Dualität $\delta \in \mathfrak{D}_{Ou}$ die Kommutativität der Homologien $\in \mathfrak{P}_{Ou}$ zur Folge hat.

Ist $\omega \in \mathfrak{P}_{Vx}$, so ist $\pi = \delta^{-1}\omega\delta \in \mathfrak{P}_{Uy}$, also $\mathfrak{P}_{Uy}$ linear transitiv, und es gilt für alle P auf u: $P\pi = P\delta^{-1}\omega\delta = (O, P)\omega\delta = (O, P\omega)\delta = P\omega$. Da jedes Element $\omega' \in \mathfrak{P}_{Vx}$ mit jedem Element $\pi' \in \mathfrak{P}_{Uy}$ kommutiert (s. Folgerung 3 von Satz 1), folgt $(P\omega)\omega' = (P\pi)\omega' = (P\omega')\pi = (P\omega')\omega$ für $P \mathrel{I} u$, da mit P auch $P\omega'$ auf u liegt. Mithin gilt $\omega\omega' = \omega'\omega$, d.h. $\mathfrak{P}_{Vx}$ ist abelsch und damit nach Lemma 9 auch $\mathfrak{P}_{Ou}$.

Der Beweis der Kommutativität der Homologien $\in \mathfrak{P}_{Ou}$ aus der Existenz einer perspektiven Dualität $\in \mathfrak{D}_{Ou}$ kann unter wesentlich schwächeren Voraussetzungen geführt werden. Wir wollen darauf noch im Anhang näher eingehen, vor allem deshalb, weil sich dabei einige Tatsachen über perspektive Kollineationen und Dualitäten ergeben, die für sich von Interesse sind.

Wir müssen nun umgekehrt zeigen, daß die Kommutativität der Homologien $\in \mathfrak{P}_{Ou}$ bei Voraussetzung von P7 die Existenz einer perspektiven Dualität mit O als Zentrum und u als Achse zur Folge hat. Wir beweisen dazu vorerst folgendes Lemma:

Lemma 10. *Unter Voraussetzung von* P7 *zieht die Kommutativität der Homologien* $\in \mathfrak{P}_{Ou}$ *die einfache Transitivität der Gruppe* $\mathfrak{P}_{UO}$ *nach sich.*

Beweis. Zunächst folgt aus P7 nach Satz 1, Folgerung 3, daß die Gruppe $\mathfrak{P}_{ux}$ einfach transitiv ist. Der innere Automorphismus ψ mit

$$\pi^{\psi} = \omega^{-1}\pi\omega \quad \textit{für } \pi \in \mathfrak{P}_{ux} \textit{ und festes } \omega \in \mathfrak{P}_{Vx}$$

der Gruppe $\mathfrak{P}_{ux}$ führt jede Komponente wieder in eine Komponente über und die Gruppe $\mathfrak{P}_{Vx}$ elementweise in sich über, da nach Lemma 9 $\mathfrak{P}_{Vx}$ abelsch ist, also $\omega^{-1}\omega'\omega = \omega'$ für $\omega' \in \mathfrak{P}_{Vx}$ gilt. Mithin sind die nach Satz 1 zu ψ gehörenden Kollineationen λ nach Satz 1, Folgerung 2 Elemente von $\mathfrak{P}_{Uy}$, wenn $P = P'$ und $P \mathrel{I} y$ gewählt wird. Die Gruppe $\mathfrak{P}_{Uy}$ ist dann linear transitiv, denn seien Q, Q' Punkte $\neq P, U$ auf (P, U), so ist das Element $\in \mathfrak{P}_{ux}$, welches P in Q überführt, die Translation $\tau_{PQ} \in \mathfrak{P}_{Ux}$. Nach Lemma 8 gibt es dann ein $\omega \in \mathfrak{P}_{Vx}$ mit $\omega^{-1}\tau_{PQ}\omega = \tau_{PQ'}$, woraus $Q\lambda = P\tau_{PQ}^{\psi} = P\omega^{-1}\tau_{PQ}\omega = P\tau_{PQ'} = Q'$ folgt. Da daher die Gruppen $\mathfrak{P}_{Uy}$ und $\mathfrak{P}_{Ux}$ linear transitiv sind, muß nach

der dualen Aussage zu Lemma 4 $\mathfrak{P}_{UO}$ einfach transitiv sein. Damit ist Lemma 10 bewiesen.

Auf Grund des Bewiesenen gibt es also zu jedem $\omega \in \mathfrak{P}_{Vx}$ genau ein $\lambda \in \mathfrak{P}_{Uy}$ mit $\omega^{-1}\pi\omega = \lambda^{-1}\pi\lambda$ für alle $\pi \in \mathfrak{P}_{ux}$. Ordnen wir diese Elemente einander zu, so erhalten wir offenbar einen Isomorphismus χ von $\mathfrak{P}_{Vx}$ und $\mathfrak{P}_{Uy}$. Diesen können wir zu einem Isomorphismus der Gruppen $\mathfrak{P}_{ux}$ und $\mathfrak{P}_{UO}$ erweitern, wenn wir bedenken, daß jedes Element $\pi \in \mathfrak{P}_{ux}$ eindeutig in der Form $\omega\tau$ mit $\omega \in \mathfrak{P}_{Vx}$ und $\tau \in \mathfrak{P}_{Ux}$ und jedes Element $\bar{\pi} \in \mathfrak{P}_{UO}$ eindeutig in der Form $\lambda\tau$ mit $\lambda \in \mathfrak{P}_{Uy}$ und $\tau \in \mathfrak{P}_{Ux}$ darzustellen ist (vgl. S. 337). Die Abbildung

$$\pi^{\varrho} = \omega^{\chi}\tau \quad \text{für } \pi = \omega\tau \in \mathfrak{P}_{ux}$$

ist dann nämlich ein Isomorphismus von $\mathfrak{P}_{ux}$ auf $\mathfrak{P}_{UO}$, denn es ist wegen $\omega^{-1}\tau\omega = (\omega^{\chi})^{-1}\tau\,\omega^{\chi}$:

$$\begin{aligned}(\pi_1\pi_2)^{\varrho} &= (\omega_1\tau_1\omega_2\tau_2)^{\varrho} = (\omega_1\omega_2\omega_2^{-1}\tau_1\omega_2\tau_2)^{\varrho} = (\omega_1\omega_2)^{\chi}(\omega_2^{-1}\tau_1\omega_2)\tau_2\\ &= \omega_1^{\chi}\omega_2^{\chi}\left((\omega_2^{\chi})^{-1}\tau_1\omega_2^{\chi}\right)\tau_2 = \omega_1^{\chi}\tau_1\omega_2^{\chi}\tau_2 = \pi_1^{\varrho}\pi_2^{\varrho}.\end{aligned}$$

Nach Satz 3 gibt es zu ϱ eine Dualität δ, die perspektive Dualität mit u als Achse und O als Zentrum ist, wenn $P \mathrel{I} y$ und $p \mathrel{I} V$ gewählt wird, denn es gilt $\tau^{\varrho} = \delta^{-1}\tau\delta = \tau$ für $\tau \in \mathfrak{P}_{Ux}$ und damit $U\delta = x$, $x\delta = U$. Außerdem ist $\omega^{\varrho} = \delta^{-1}\omega\delta \in \mathfrak{P}_{Uy}$ für $\omega \in \mathfrak{P}_{Vx}$, also $V\delta = y$. Umgekehrt folgt aus $y = (V,P)$ und $V\delta = y$: $y\delta = (V\delta, P\delta) = y \cdot p = V$. Ist nun Q ein Punkt $\neq U$ auf u und τ die Translation $\in \mathfrak{P}_{Ux}$ mit $V\tau = Q$, so gilt $Q\delta = V\tau\delta = V\delta\tau = y\tau = (O, Q)$. Ist endlich $\bar{y}$ eine beliebige Gerade $\neq x$ durch O, so gibt es eine Translation $\tau \in \mathfrak{P}_{Ux}$ mit $\bar{y} = y\tau$, und es gilt: $\bar{y}\delta = y\tau\delta = y\delta\tau = V\tau = \bar{y} \cdot u$. Mithin ist δ perspektive Dualität mit O als Zentrum und u als Achse und damit insgesamt bewiesen der

Satz 14. *Eine projektive Ebene ist genau dann als projektive Koordinatenebene über einem kommutativen Körper darstellbar, wenn in ihr Axiom* P7 *und* P8 *gelten.*

Wir bemerken nun noch zum Schluß, daß man in Satz 14 statt P8 auch das folgende schwächere Axiom fordern kann:

P8′. *Es gibt wenigstens eine quasiprojektive Dualität* δ'.

Dabei heißt eine Dualität δ' *quasiprojektiv*, wenn die Punkte P einer Geraden g mit $g\delta' \nmid g$ jeweils durch eine Kollineation α auf die Punkte $P\delta' \cdot g$ auf g abgebildet werden können, d.h. wenn die durch δ' auf einer Geraden g induzierte eineindeutige Abbildung der Punkte auf g in eine Kollineation eingebettet werden kann.

Dem Beweis der Äquivalenz der Axiome P8 und P8′ bei Voraussetzung von Axiom P7 schicken wir einige Hilfssätze voraus.

Lemma 11. *Existiert in einer projektiven Ebene Π, in der Axiom* P7 *erfüllt ist, eine Dualität δ, so ist in Π die Gruppe $\mathfrak{P}_{Za}$ bei beliebiger Wahl von Z und a linear transitiv*[22]).

[22]) Vgl. LENZ [10], Satz 2.

Beweis. (a) *Es gibt eine Kollineation α in Π mit $u\alpha \neq u$ oder $x\alpha \neq x$.* Denn mit $\mathfrak{P}_{xu}$ ist nach Satz 1, Folgerung 3 auch $\mathfrak{P}_{ux}$ einfach transitiv, also sind auch die Gruppen $\delta^{-1}\mathfrak{P}_{xu}\delta = \mathfrak{P}_{u\delta x\delta}$ und $\delta^{-1}\mathfrak{P}_{ux}\delta = \mathfrak{P}_{x\delta u\delta}$ einfach transitiv. Ist nun $u\delta \nmid u$, so kann man für α ein Element $\neq 1$ aus $\mathfrak{P}_{u\delta x\delta}$ mit von u verschiedener Achse wählen und ist $u\delta \nmid x$, so wähle man als Kollineation α eine perspektive Kollineation $\neq 1$ aus $\mathfrak{P}_{u\delta x\delta}$ mit von x verschiedener Achse. Im ersten Fall gilt $u\alpha \neq u$ und im zweiten $x\alpha \neq x$. Ist aber $u\delta = u \cdot x = U$, so ist $x\delta \neq U$, also entweder $x\delta \nmid u$ oder $x\delta \nmid x$, und es gibt stets ein Element $\alpha \neq 1$ aus $\mathfrak{P}_{x\delta u\delta}$ mit $x\alpha \neq x$ oder $u\alpha \neq u$, wie man durch Vertauschen von x und u im vorstehenden Beweis erkennt.

(b) *Es gibt eine Gerade v in Π, so daß die Gruppe $\mathfrak{P}_{Zv}$ für beliebige Wahl von Z linear transitiv ist.* Denn gilt für die nach (a) existierende Kollineation α $x\alpha \neq x$, aber $u\alpha = u$, so folgt (b) für $v = u$ aus Lemma 4, denn mit $\mathfrak{P}_{xu}$ ist auch $\mathfrak{P}_{x\alpha u\alpha} = \mathfrak{P}_{x\alpha u}$ einfach transitiv. Entsprechend folgt für $u\alpha \neq u$, aber $x\alpha = x$ (b) mit $v = x$ aus der Transitivität von $\mathfrak{P}_{ux}$ und $\mathfrak{P}_{u\alpha x}$. Gilt aber $u\alpha \neq u$ und $x\alpha \neq x$ für die nach (a) existierende Kollineation und ist $W = (u\alpha, u)$, so gibt es wegen der Transitivität von $\mathfrak{P}_{u\alpha x\alpha}$ ein Element $\omega \in \mathfrak{P}_{Wx\alpha}$ mit $x\omega \neq x$. Dann ist $\mathfrak{P}_{x\omega u\omega} = \mathfrak{P}_{x\omega u}$ einfach transitiv und damit nach Lemma 4 die Behauptung von (b) für $v = u$ richtig.

Nach [*13*], Abschn. 3, Satz 20 und 27 folgt dann aus (b) sofort Lemma 11.

Lemma 12. *Ist δ eine Dualität, so gibt es eine Gerade p mit $p\delta \nmid p$, wobei p so gewählt werden kann, daß $p\delta \nmid g$ für eine beliebig vorgegebene Gerade g gilt.*

Beweis. Gilt $g\delta \nmid g$, so wähle man für p die Gerade g selbst. Sei also $g\delta \mid g$. Dann gibt es eine Gerade h durch $g\delta^{-1}$ auf g ($h \neq g$) mit $h\delta \neq g\delta^{-1}$, denn es gibt wenigstens zwei verschiedene Geraden $h, l \neq g$ durch $g\delta^{-1}$, so daß wenigstens eine der beiden verschiedenen Punkte $h\delta$, $l\delta$ ungleich $g\delta^{-1}$ sein muß. Sei ferner p eine Gerade $\neq g$ durch $h\delta$, dann ist $p \neq h$ und $p \cdot h \nmid g$. Seien endlich q, r zwei verschiedene Geraden $\neq p, h$ durch $p \cdot h$, dann kann nicht $p\delta \mid p$ und $q\delta \mid q$ und $r\delta \mid r$ gleichzeitig gelten, da $h\delta$, $p\delta$, $q\delta$, $r\delta$ kollinear und voneinander verschieden sind. Sei etwa $p\delta \nmid p$, dann erfüllt p die Bedingungen von Lemma 12. Ist aber $q\delta \nmid q$ oder $r\delta \nmid r$, so erfüllt q oder r die Bedingungen von Lemma 12.

Lemma 13. *Unter Voraussetzung von Axiom P7 gilt: Ist δ eine quasiprojektive Dualität und sind g, h zwei beliebige Geraden mit $h \nmid g\delta$, so gibt es stets eine Kollineation β mit $P\beta = P\delta \cdot h$ für alle P auf g*[23]).

Beweis. (a) Sei zunächst $g\delta \nmid g$. Dann existiert nach Voraussetzung eine Kollineation α mit $P\alpha = P\delta \cdot g$ für alle P auf g. Nach Lemma 11 läßt sich weiter eine perspektive Kollineation ω mit $g\delta$ als Zentrum und einer mit g, h im Büschel liegenden Achse derart finden, daß g in h übergeführt wird. Dann gilt $P\alpha\omega = P\delta \cdot h$ für alle P auf g, woraus die Behauptung von Lemma 13 mit $\beta = \alpha\omega$ folgt.

[23]) Lemma 13 zeigt, daß in einer projektiven Ebene, in der Axiom P7 gilt, die hier gegebene Definition einer quasiprojektiven Dualität mit der von Lenz in [*11*] angegebenen (spezielleren) Definition übereinstimmt.

(b) Sei $g\delta \mathrel{I} g$, dann gibt es nach Lemma 12 eine Gerade $\not p$ mit $\not p\delta \mathrel{\not I} \not p, g$ und nach (a) eine Kollineation γ mit $Q\gamma = Q\delta \cdot g$ für alle Q auf $\not p$. Ist dann P ein Punkt auf g und $P\gamma^{-1} = Q$, so gilt ersichtlich $(P, \not p\delta) = Q\delta$, woraus $P\delta \cdot \not p\delta^2 = Q\delta^2 = P\gamma^{-1}\delta^2$ folgt. Es gilt dann $\not p\delta^2 = q \mathrel{\not I} g\delta$, da sonst $\not p\delta \mathrel{I} g$ wäre. Sei nun ω die nach Lemma 11 existierende perspektive Kollineation mit $g\delta$ als Zentrum und einer mit h, q im Büschel liegenden Achse, die q in h überführt, dann gilt $P\gamma^{-1}\delta^2\omega = P\delta \cdot h$, also mit $\beta = \gamma^{-1}\delta^2\omega$ die Behauptung von Lemma 13.

Lemma 14. *Unter Voraussetzung von* P7 *gilt: Ist δ eine quasiprojektive Dualität und α eine Kollineation, so ist $\delta\alpha$ bzw. $\alpha\delta$ eine quasiprojektive Dualität.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß $\delta\alpha$ eine quasiprojektive Dualität ist. Hierfür muß man sich überzeugen, ob für $g\delta\alpha \mathrel{\not I} g$ eine Kollineation β mit $P\beta = P\delta\alpha \cdot g$ existiert. Wegen $g\delta\alpha \mathrel{\not I} g$ ist $g\alpha^{-1} \mathrel{\not I} g\delta$, mithin gibt es nach Lemma 13 eine Kollineation γ mit $P\gamma = P\delta \cdot g\alpha^{-1}$ für alle P auf g, woraus sofort $P\gamma\alpha = P\delta\alpha \cdot g$, also für $\beta = \gamma\alpha$ die Behauptung folgt.

Für $\alpha\delta$ schließen wir entsprechend: Sei $g\alpha = h$, so gibt es wegen $h\delta \mathrel{\not I} g$ nach Lemma 13 eine Kollineation γ mit $Q\gamma = Q\delta \cdot g$ für alle Q auf h, mithin folgt $P\alpha\gamma = P\alpha\delta \cdot g$ für alle P auf g, woraus sich mit $\beta = \alpha\gamma$ die Behauptung ergibt.

Lemma 15. *Unter Voraussetzung von Axiom* P7 *und Axiom* P8′ *gibt es eine quasiprojektive Dualität δ' mit $O\delta' = u$ und $u\delta' = O$.*

Beweis. Nach Lemma 12 gibt es für die nach P8′ existierende quasiprojektive Dualität δ eine Gerade g mit $g\delta \mathrel{\not I} g$. Wir dürfen dann annehmen, daß $g = u$ und $g\delta = O$ ist, denn ist $g \neq u$ und P bzw. Q ein Punkt $\neq g \cdot u$ auf g bzw. u und $(P, g\delta) \cdot (Q, O) = R$, so gibt es nach Lemma 11 eine perspektive Kollineation ω mit einem mit $O, g\delta$ und mit Q, P kollinearen Punkt als Zentrum und einer durch $g \cdot u$ und R gehenden Achse, die $g\delta$ in O und g in u überführt. Dann aber ist $\omega^{-1}\delta\omega$ nach Lemma 14 eine quasiprojektive Dualität δ'' mit $u\delta'' = O$. Es gibt dann weiter eine perspektive Kollineation ω' mit O als Zentrum, die $u\delta''^2$ in u überführt. Dann ist $\delta''\omega'$ nach Lemma 14 eine quasiprojektive Dualität δ' mit $u\delta' = u(\delta''\omega') = O\omega' = O$ und $O\delta' = (u\delta')\delta''\omega' = u\delta''^2\omega' = u$, wie verlangt.

Beweis der Äquivalenz von P8 und P8′ bei Voraussetzung von P7:

(a) *Aus* P8′ *folgt* P8: Sei δ' die nach Lemma 15 vorhandene quasiprojektive Dualität und α eine Kollineation mit $P\alpha = P' = P\delta' \cdot u$ für alle P auf u. Wir dürfen annehmen, daß $O\alpha = O$ ist [anderenfalls gibt es nach P7 und Lemma 4 eine perspektive Kollineation π mit u als Achse, für die $(O\alpha)\pi = O$ ist, und man kann α durch $\alpha' = \alpha\pi$ ersetzen, da für α' dann ebenfalls $P\alpha' = P\alpha\pi = P'\pi = P'$ für $P \mathrel{I} u$, aber außerdem $O\alpha' = O$ gilt]. $\delta'\alpha^{-1}$ ist dann perspektive Dualität $\in \mathfrak{D}_{Ou}$, denn es gilt $P\delta'\alpha^{-1} = (P', O)\alpha^{-1} = (P, O)$ für alle $P \mathrel{I} u$ und $g\delta'\alpha^{-1} = (g, u) = Q$ für $g \mathrel{I} O$; letzteres, da sich aus $g = (O, Q)$ ergibt $g\delta' = u \cdot Q\delta' = u \cdot (Q', O)$.

(b) *Aus* P8 *folgt* P8′: Sei δ die nach P8 existierende Dualität $\in \mathfrak{D}_{Ou}$, so ist δ quasiprojektiv, da für die Gerade u $\alpha = 1$ gewählt werden kann und

für $g \neq u$ $[g \not\ni O]$ die Translation $\alpha = \tau_{OG} \in \mathfrak{P}_{uu}$ mit $G = g\delta$ das Verlangte leistet. Die Translation τ_{OG} existiert, da nach Satz 14 und 10 die Gruppe $\mathfrak{P}_{uu}$ einfach transitiv ist. Wir haben damit bewiesen den

Satz 15. *Eine projektive Ebene ist genau dann als projektive Koordinatenebene über einem kommutativen Körper darstellbar, wenn in ihr Axiom* P7 *und* P8′ *erfüllt sind.*

Satz 15 entnimmt man, daß in der projektiven Koordinatenebene über einem Fastkörper $\mathfrak{F}$ genau dann eine quasiprojektive Dualität existiert, wenn $\mathfrak{F}$ ein kommutativer Körper ist.

Anhang

Wir wollen nun den in § 5 angekündigten Beweis darstellen. Zunächst leiten wir her den

Satz 16. *Gelten in einer projektiven Ebene die Axiome* P7b *und* P8, *so gibt es eine Homologie* $\sigma \in \mathfrak{P}_{Ou}$ *mit*

$$\delta^2 = \sigma \quad \text{für alle } \delta \in \mathfrak{D}_{Ou}. \tag{31}$$

σ *ist entweder involutorische Homologie* $\in \mathfrak{P}_{Ou}$ *oder die Identität, und es gilt* $\sigma\tau\sigma = \tau^{-1}$ *für alle* $\tau \in \mathfrak{P}_{Uu}$.

Beweis. Sei δ ein beliebiges Element $\in \mathfrak{D}_{Ou}$ und τ eine beliebige Translation $\neq 1$ aus $\mathfrak{P}_{Uu}$ und $O\tau = A$. Dann ist $\delta^{-1}\tau^{-1}\delta = \tau'$ eine Translation $\in \mathfrak{P}_{Ox}$ mit $x = (O, U)$, für die $(A\delta)\tau' = A\delta\delta^{-1}\tau^{-1}\delta = u$ gilt. Sei dann weiter B ein beliebiger Punkt $\neq U$ auf $A\delta$, dann muß, da $B\tau'$ auf u liegt,

$$B\delta^{-1} = B\tau'\delta^{-1}\tau = (O, B\tau')\tau = (A, B\tau') \tag{32}$$

und wegen $(O, B\tau') = (O, B)$ auch

$$B\delta^{-1} = (O, B)\tau = (A, B\tau) \tag{33}$$

gelten. Mit B liegt nun auch $B\tau^{-1}$ auf $A\delta$, da $A\delta$ mit U inzidiert. Wendet man daher auf $B\tau^{-1}$ die Gl. (33) an, so hat man $(B\tau^{-1})\delta^{-1} = (A, B)$. Andererseits ist nach (32) auch $B\delta^{-1}\tau'^{-1} = (A, B)$, so daß $B\tau^{-1}\delta^{-1} = B\delta^{-1}\tau'^{-1}$ oder $B\delta\tau^{-1}\delta^{-1} = B\tau'^{-1}$ folgt. Da $\delta\tau^{-1}\delta^{-1} \in \mathfrak{P}_{Ox}$ ist, muß nach Lemma 1 $\delta\tau^{-1}\delta^{-1} = \tau'^{-1}$, also $\delta\tau^{-1}\delta^{-1} = \delta^{-1}\tau\delta$ und endlich

$$(\delta^2)^{-1}\tau\delta^2 = \tau^{-1} \tag{34}$$

gelten. Da diese Gleichung für beliebiges $\delta \in \mathfrak{D}_{Ou}$ richtig ist, muß δ^2 für alle $\delta \in \mathfrak{D}_{Ou}$ gleich einer festen Homologie $\sigma \in \mathfrak{P}_{Ou}$, mithin (31) gültig sein, denn wegen der Eindeutigkeitsaussage in Lemma 8 (die nur Lemma 1, nicht P7 verwendet) gibt es höchstens eine Homologie $\in \mathfrak{P}_{Ou}$ mit $\sigma^{-1}\tau\sigma = \tau^{-1}$.

Aus $\sigma^{-1}\tau\sigma = \tau^{-1}$ folgt $\sigma^{-2}\tau\sigma^2 = \tau$ und daher nach der Eindeutigkeitsaussage in Lemma 8 $\sigma^2 = 1$. Also ist σ entweder involutorisch oder die Identität. Aus (34) entsteht dann die Gleichung

$$\delta^2\tau\delta^2 = \sigma\tau\sigma = \tau^{-1} \quad \text{für alle } \delta \in \mathfrak{D}_{Ou} \text{ und alle } \tau \in \mathfrak{P}_{Uu}, \tag{35}$$

womit Satz 16 vollständig bewiesen ist.

(31) entnimmt man im übrigen, daß alle Elemente $\in \mathfrak{D}_{Ou}$ die gleiche Ordnung, und zwar höchstens die Ordnung 4 haben. Mit Satz 16 erhält man ohne Mühe den

Satz 17. *Unter Voraussetzung von Axiom* P7b *und* P8 *gilt*

$$\delta^{-1}\omega\,\delta = \omega^{-1} \quad \textit{für alle } \delta \in \mathfrak{D}_{Ou} \textit{ und alle } \omega \in \mathfrak{P}_{Ou}. \tag{36}$$

Beweis. Mit δ ist offensichtlich auch $\delta\omega \in \mathfrak{D}_{Ou}$ und daher nach Satz 16 $\delta^2 = \sigma$ und $(\delta\omega)^2 = \sigma$, also $\delta^{-1} = \sigma\delta$ und $\sigma\delta\omega\,\delta\omega = 1$, was zusammen $\delta^{-1}\omega\,\delta = \omega^{-1}$ ergibt.

Aus (35) und (36) folgt dann, daß $\mathfrak{P}_{Uu}$ und $\mathfrak{P}_{Ou}$ abelsch sind, denn sind τ_1, τ_2 zwei Translationen $\in \mathfrak{P}_{Uu}$, so gilt wegen (35): $\tau_1\tau_2 = \sigma(\tau_1\tau_2)^{-1}\sigma = \sigma\tau_2^{-1}\tau_1^{-1}\sigma = \sigma\tau_2^{-1}\sigma\sigma\tau_1^{-1}\sigma = \tau_2\tau_1$. Entsprechend schließt man aus (36), daß die Homologien $\in \mathfrak{P}_{Ou}$ kommutieren. Damit können wir abschließend formulieren:

Satz 18. *Sind in einer projektiven Ebene die Axiome* P7b *und* P8 *erfüllt, so sind die Gruppen* $\mathfrak{P}_{Uu}$ *und* $\mathfrak{P}_{Ou}$ *abelsch.*

Literatur

[1] André, J.: Über nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe. Math. Z. **60**, 156—186 (1954). — [2] André, J.: Projektive Ebenen über Fastkörpern. Math. Z. **62**, 137—160 (1955). — [3] Artin, E.: Geometric Algebra. Interscience tracts in pure and applied mathematics **3**. New York 1957. — [4] Baer, R.: Homogeneity of projective planes. Amer. J. Math. **64**, 137—152 (1942). — [5] Baer, R.: Linear algebra and projective geometry. New York 1952. — [6] Hall, M.: Projective planes. Trans. Amer. Math. Soc. **54**, 229—277 (1943). — [7] Hall, M.: Corrections to „Projective planes". Trans. Amer. Math. Soc. **65**, 473—474 (1949). — [8] Hessenberg, G.: Grundlagen der Geometrie. Berlin 1930. — [9] Hilbert, D.: Grundlagen der Geometrie, 8. Aufl. Stuttgart 1956. — [10] Lenz, H.: Kleiner Desarguesscher Satz und Dualität in projektiven Ebenen. Jber. dtsch. Math. Verein. **57**, 20—31 (1954). — [11] Lenz, H.: Zur Begründung der analytischen Geometrie. Sitzgsber. Bayr. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl. **1954**, 17—72. — [12] Lingenberg, R.: Begründung der absoluten Geometrie der Ebene. Phil. Diss. Kiel 1955. — [13] Pickert, G.: Projektive Ebenen. Berlin usw. 1955. — [14] Schwan, W.: Streckenrechnung und Gruppentheorie. Math. Z. **3**, 11—28 (1919). — [15] Veblen, O., and W. Young: Projective geometry, Bd. 1, 2. Boston 1910—1916.

Institut A für Höhere Mathematik an der Technischen Hochschule Hannover

(Eingegangen am 22. November 1956)

Walter, W.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 361—376 (1957)

Über die Euler-Poisson-Darboux-Gleichung

Von
Wolfgang Walter

1. Einleitung. Die vorliegende Arbeit behandelt das Anfangswertproblem für die Euler-Poisson-Darboux-Gleichung (EPD-Gleichung)

$$L(u) = u_{rr} + \frac{k}{r} u_r - \Delta u = 0. \tag{1.1}$$

Dabei ist $u(r, x_1, \ldots, x_n) = u(r, x)$ eine von $n+1$ reellen Veränderlichen ($n \geqq 1$) abhängende reelle Funktion, $\Delta u = u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n}$ und k eine reelle Konstante. Unter einer Lösung der Gl. (1.1) verstehen wir immer eine für alle $r > 0$, $x \in E_n$ (E_n ist der n-dimensionale Euklidische Raum) erklärte und zweimal stetig differenzierbare Funktion u, für die $L(u) = 0$ ist. Die Ausdrucksweisen „u besitzt stetige partielle Ableitungen bis zur Ordnung i", „u ist i-mal stetig differenzierbar", „u ist aus der Klasse C^i" besagen ein und dasselbe.

Das Cauchysche Anfangswertproblem besteht darin, zu einer vorgegebenen Funktion $f(x)$ (welche gewisse, später noch genau anzugebende Regularitätsvoraussetzungen erfüllen soll) eine Lösung $u(r, x)$ von (1.1) zu finden, für die

$$u(0, x) = f(x) \quad \text{und} \quad u_r(0, x) = 0 \tag{1.2}$$

ist (vgl. jedoch Nr. 5)*).

Es ist für viele Rechnungen zweckmäßig, an Stelle von r die neue unabhängige Veränderliche $s = r^2$ einzuführen. Setzen wir dementsprechend $\bar{u}(s, x) = u(\sqrt{s}, x)$, so wird aus (1.1) die Gleichung

$$4 s \bar{u}_{ss} + 2(k+1)\bar{u}_s - \Delta \bar{u} = 0$$

oder

$$\bar{L}(\bar{u}) = s \bar{u}_{ss} + c \bar{u}_s - \frac{1}{4} \Delta \bar{u} = 0, \qquad c = \frac{k+1}{2}; \tag{1.3}$$

die Randbedingungen lauten jetzt

$$\bar{u}(0, x) = f(x) \quad \text{und} \quad \sqrt{s}\, \bar{u}_s(s, x) \to 0 \quad \text{für } s \to 0. \tag{1.4}$$

Die letzte Bedingung ist insbesondere dann erfüllt, wenn $\bar{u}_s$ für kleine s beschränkt bleibt.

Eine vollständige Lösung des Anfangswertproblems gaben Weinstein [9] und später mit anderer Methode Diaz und Weinberger [4]. Beide Autoren

*) Genauer: u und u_r sollen für $r \geq 0$ stetig sein und den Gln. (1.2) genügen. Gleichbedeutend sind die Formulierungen: Für $(r, x) \to (0, x_0)$ soll $u(r, x) \to f(x_0)$, $u_r(r, x) \to 0$ streben; für $r \to 0$ soll — gleichmäßig in jedem beschränkten x-Bereich — $u(r, x) \to f(x)$, $u_r(r, x) \to 0$ streben.

gehen vom Fall $k \geqq n-1$ aus, wo die Lösung durch gewisse Mittelwerte der Funktion $f(x)$ dargestellt werden kann (s. Nr. 3). Durch analytische Fortsetzung dieser Formeln gelangen DIAZ und WEINBERGER zu Lösungen für $k<n-1$, während bei WEINSTEIN [9], [10], [11] die beiden Rekursionsformeln

$$u_r^{(k)}(r,x) = r\,u^{(k+2)}(r,x); \qquad u^{(k)}(r,x) = r^{1-k}\,u^{(2-k)}(r,x) \tag{1.5}$$

[mit $u^{(k)}$ wird eine Lösung von (1.1) bezeichnet] die Grundlage für die Behandlung der Fälle $k<n-1$ bilden. Die „Ausnahmewerte" $k=-1,-3,-5,\ldots$ $(c=0,-1,-2,\ldots)$ bedürfen einer gesonderten Betrachtung (vgl. dazu auch BLUM [2]). Die Formeln (1.5) sind äquivalent mit

$$\bar{u}_s^{(c)}(s,x) = \bar{u}^{(c+1)}(s,x); \qquad \bar{u}^{(c)}(s,x) = s^{1-c}\,\bar{u}^{(2-c)}(s,x); \tag{1.6}$$

dabei ist $\bar{u}^{(c)}$ eine Lösung von (1.3).

In dieser Arbeit wird zunächst in Nr. 2 das Anfangswertproblem für analytische Anfangswerte behandelt. Die Lösung kann dann als unendliche Reihe dargestellt werden. An diesen Reihen wird unter anderem die schon von WEINSTEIN [9] bemerkte Sonderstellung der polyharmonischen Anfangswerte unmittelbar sichtbar. Bei der Behandlung der Fälle $k \geqq n-1$ wurde bisher immer $f \in C^2$ vorausgesetzt; in Nr. 3 wird ein neuer Beweis gegeben, welcher mit geringeren Voraussetzungen auskommt. Genauere Aussagen über das Randverhalten der Lösungen enthält die Nr. 4. Als wichtigstes Ergebnis der letzten Nummer, in der auf Eindeutigkeitsfragen eingegangen wird, sei die Tatsache genannt, daß für $k \neq 0$ die zweite Gl. (1.2) eine Folge der ersten dieser Gleichungen und der EPD-Gl. (1.1) ist, daß also diese zweite Gleichung bei der Stellung des Anfangswertproblems (für $k \neq 0$) entbehrt werden kann.

2. Analytische Anfangswerte. Es werden — nur in dieser Nummer — folgende Bezeichnungen benutzt. Ist $p=(p_1,\ldots,p_n)$ ein Vektor mit ganzzahligen nichtnegativen p_i, so sei $|p| = p_1+\cdots+p_n$ und $x^p = x_1^{p_1}x_2^{p_2}\ldots x_n^{p_n}$. Die Funktion $f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$ wird analytisch genannt, wenn sie eine Darstellung durch eine für alle x absolut konvergente Potenzreihe

$$f(x) = \sum_p a_p x^p = \sum_{p_i=0}^{\infty} a_{p_1,\ldots,p_n} x_1^{p_1}\cdots x_n^{p_n} \tag{2.1}$$

besitzt. In diesem Falle läßt sich das Anfangswertproblem für die EPD-Gleichung durch Reihenentwicklungen lösen. Die Formeln lassen sich einfacher schreiben, wenn wir die Differentialgleichung (1.3) und dementsprechend Lösungen $\bar{u}(s,x)$ betrachten.

Satz 2.1. *Ist die Funktion $f(x)$ analytisch und ist $c \neq 0,-1,-2,\ldots$, so wird durch die Reihe*

$$\bar{u}(s,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{s^\nu \Delta^\nu f(x)}{4^\nu \nu!\,(c)_\nu} \tag{2.2}$$

mit

$$(c)_0 = 1, \quad (c)_\nu = c(c+1)\ldots(c+\nu-1) \quad \text{für } \nu \geqq 1 \tag{2.3}$$

eine Lösung der Gl. (1.3) *bestimmt, welche für* $s=0$ *die Werte*

$$\bar{u}(0,x)=f(x) \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial^i \bar{u}(0,x)}{\partial s^i}=\frac{\Delta^i f(x)}{4^i (c)_i} \qquad (i=1,2,\ldots) \tag{2.5}$$

annimmt. Die Reihe (2.2) *ist eine für alle* s, x *absolut konvergente Potenzreihe. Ihre Summe stellt also (da* $\bar{u}_s$ *für kleine* s *beschränkt ist) eine Lösung des Anfangswertproblems* (1.3), (1.4) *dar.*

Beweis. Die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} A_i t^i$ mit

$$A_i=\sum_{|p|=i}|a_p| \qquad (i=0,1,2,\ldots)$$

hat nach unseren Voraussetzungen den Konvergenzradius ∞. Setzen wir

$$\Delta f(x)=\sum_p a_p^1 x^p \quad \text{und} \quad A_i^1=\sum_{|p|=i}|a_i^1|,$$

so ergibt wegen

$$\Delta x^p=p_1(p_1-1)\,x_1^{p_1-2}x_2^{p_2}\ldots x_n^{p_n}+\cdots+p_n(p_n-1)\,x_1^{p_1}\ldots x_{n-1}^{p_{n-1}}x_n^{p_n-2}$$

eine einfache Abschätzung, daß

$$A_i^1\leq n(i+1)(i+2)A_{i+2}$$

ist. Daraus folgt sofort, daß, wenn

$$\Delta^\nu f(x)=\sum_p a_p^\nu x^p \quad \text{und} \quad A_i^\nu=\sum_{|p|=i}|a_p^\nu|$$

gesetzt wird, die Ungleichung

$$A_i^\nu\leq n^\nu(i+1)(i+2)\ldots(i+2\nu)A_{i+2\nu} \tag{2.6}$$

besteht.

Die Reihe (2.2) läßt also für $|x_i|\leq t$, $|s|\leq t^2$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}|\bar{u}(s,x)|&\leq\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^{2\nu}}{4^\nu\nu!\,|(c)_\nu|}\sum_p|a_p^\nu|\,t^{|p|}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^{2\nu}}{4^\nu\nu!\,|(c)_\nu|}\sum_{i=0}^{\infty}A_i^\nu t^i\\&\leq\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^{2\nu}}{4^\nu\nu!\,|(c)_\nu|}\sum_{i=0}^{\infty}n^\nu(i+1)(i+2)\ldots(i+2\nu)A_{i+2\nu}t^i\\&\leq\sum_{j=0}^{\infty}A_jt^j\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{n^\nu j(j-1)\ldots(j-2\nu+1)}{4^\nu\nu!\,|(c)_\nu|}\end{aligned}$$

zu. Man kann, da $c\neq 0,-1,\ldots$ sein sollte, immer eine positive Konstante α so wählen, daß für alle $\nu\geq 0$

$$\alpha^\nu|(c)_\nu|\geq\nu!, \quad \text{also} \quad \frac{1}{4^\nu\nu!\,|(c)_\nu|}\leq\frac{\alpha^\nu}{(2\nu)!}$$

ist. Dann ist aber

$$\sum_{\nu} \frac{n^{\nu} j(j-1)\dots(j-2\nu+1)}{4^{\nu}\nu!\,|(c)_{\nu}|} \leqq \sum_{\nu} (n\alpha)^{\nu} \binom{j}{2\nu} \leqq (n\alpha)^{j} \sum_{\mu=0}^{j} \binom{j}{\mu} = (2n\alpha)^{j},$$

also

$$|\bar{u}(s,x)| \leqq \sum_{i=0}^{\infty} A_i (2n\alpha)^i t^i,$$

d.h. die Reihe (2.2) ist für alle s, x absolut konvergent.

Der Rest des Beweises ist einfach. Durch gliedweise Differentiation ergibt sich

$$\begin{aligned} \bar{L}(\bar{u}) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{s^{\nu-1}\Delta^{\nu} f}{4^{\nu}\nu!\,(c)_{\nu}} [\nu(\nu-1)+c\nu] - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{s^{\nu}\Delta^{\nu+1} f}{4^{\nu+1}\nu!\,(c)_{\nu}} \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{s^{\nu-1}\Delta^{\nu} f}{4^{\nu}\nu!\,(c)_{\nu}} [\nu(\nu+c-1) - \nu(\nu+c-1)] = 0. \end{aligned}$$

Schließlich erhält man die Formeln (2.4), (2.5) sofort aus (2.2).

Ist c eine der Zahlen $0, -1, -2, \dots$ (d.h. k eine der Zahlen $-1, -3, \dots$), so verliert die Reihe (2.2) ihren Sinn, da im Nenner Nullen auftreten. Doch lassen sich auch für diese Fälle Reihenentwicklungen angeben.

Satz 2.2. *Ist $c = -q$ eine ganze Zahl $\leqq 0$, so ist die Funktion*

$$\bar{u}(s,x) = \sum_{\nu=0}^{q} \frac{s^{\nu}\Delta^{\nu} f(x)}{4^{\nu}\nu!\,(c)_{\nu}} + \sum_{\nu=q+1}^{\infty} \frac{s^{\nu}\Delta^{\nu} f(x)\,(\log s - \beta_{\nu})}{4^{\nu}\nu!\,(c)_{\nu}^{*}} \tag{2.7}$$

eine Lösung der EPD-Gl. (1.3). *Dabei soll*

$$\beta_{q+1} = 0, \quad \beta_{q+i} = \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{1}{j} + \frac{1}{q+j+1} \right) \quad (i = 2, 3, \dots) \tag{2.8}$$

und $(c)_{\nu}^{*}$ die Zahl sein, welche sich ergibt, wenn man den im Produkt $(c)_{\nu}$ auftretenden Faktor 0 wegläßt, also

$$(-q)_{\nu}^{*} = (-1)^{q} q!\,(\nu - q - 1)! \quad \text{für } \nu \geqq q+1. \tag{2.9}$$

Die Funktion $\bar{u}$ nimmt die Randwerte

$$\frac{\partial^{i}\bar{u}(0,x)}{\partial s^{i}} = \frac{\Delta^{i} f(x)}{4^{i}(c)_{i}} \quad \text{für } i = 0, 1, \dots, q \tag{2.10}$$

an, während die $(q+1)$-te Ableitung (neben anderen, für $s \to 0$ beschränkt bleibenden Gliedern) ein Glied mit einer logarithmischen Singularität

$$\frac{(-1)^{q}\Delta^{q+1} f(x) \log s}{4^{q+1} q!} \tag{2.11}$$

aufweist. Die (für alle x und $s > 0$ absolut konvergente) Reihe (2.7) *ist also eine Lösung des Anfangswertproblems* (1.3), (1.4).

Beweis. Der Konvergenzbeweis kann, da für $\nu \geqq q+1$

$$\frac{1}{4^\nu \nu!\,|(c)_\nu^*|} = \frac{1}{4^\nu \nu!\, q!\,(\nu-q-1)!} \leqq \frac{\nu^{q+1}}{(2\nu)!} \leqq \frac{\alpha^\nu}{(2\nu)!}$$

bei geeignetem $\alpha > 0$ und da $\beta_\nu < 2^\nu$ ist, ganz ähnlich wie oben bei Satz 1 durchgeführt werden.

Der Koeffizient von $s^{\nu-1}\Delta^\nu \bar{u}$ lautet in der Reihe für $\Delta\bar{u}/4$

$$(2.12)\qquad \frac{1}{4^\nu(\nu-1)!\,(c)_{\nu-1}} \quad \text{für } \nu \leqq q+1; \qquad \frac{\log s - \beta_{\nu-1}}{4^\nu(\nu-1)!\,(c)^*_{\nu-1}} \quad \text{für } \nu \geqq q+2,$$

und in der Reihe für $s\bar{u}_{ss} + c\bar{u}_s$

$$(2.13)\qquad \begin{cases} \dfrac{\nu(\nu-1)+c\nu}{4^\nu \nu!\,(c)_\nu} & \text{für } \nu \leqq q; \\ \dfrac{\nu(\nu+c-1)\,(\log s - \beta_\nu) + 2\nu + c - 1}{4^\nu \nu!\,(c)^*_\nu} & \text{für } \nu \geqq q+1. \end{cases}$$

Die Koeffizienten aus (2.12) und (2.13) stimmen, wie man sofort sieht, für $\nu \leqq q$ überein. Für $\nu = q+1$ ergibt der erste Ausdruck in (2.12) und der zweite Ausdruck in (2.13) denselben Wert $\left[4^{q+1} q!\,(c)_q\right]^{-1}$, für $\nu \geqq q+2$ muß die Gültigkeit von

$$\frac{1}{4^\nu(\nu-1)!\,(c)^*_{\nu-1}} = \frac{\nu(\nu+c-1)}{4^\nu \nu!\,(c)^*_\nu} \quad \text{und} \quad \frac{-\beta_{\nu-1}}{4^\nu(\nu-1)!\,(c)^*_{\nu-1}} = \frac{-\nu(\nu+c-1)\,\beta_\nu + 2\nu + c - 1}{4^\nu \nu!\,(c)^*_\nu}$$

nachgewiesen werden. Hiervon ist die erste Gleichung offenbar richtig, während die zweite mit

$$\beta_\nu = \beta_{\nu-1} + \frac{2\nu+c-1}{\nu(\nu+c-1)} = \beta_{\nu-1} + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu+c-1}$$

gleichwertig, also nach (2.8) ebenfalls richtig ist.

Die Behauptungen über die Randwertannahme folgen sofort aus (2.7).

Die Lösung des Anfangswertproblems ist für $c \geqq \frac{1}{2}$ $(k \geqq 0)$ eindeutig bestimmt ([3, S. 381]; vgl. Nr. 5), während für $c < \frac{1}{2}$ nach der zweiten Formel in (1.6) $s^{1-c}\,\bar{u}^{(2-c)}(s, x)$, insbesondere also

$$s^{1-c} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{s^\nu \Delta^\nu g(x)}{4^\nu \nu!\,(2-c)_\nu}$$

bei beliebigem analytischem $g(x)$ eine Lösung $\bar{u}^{(c)}$ ist, für die die Anfangswerte (1.4) verschwinden.

Für die Wellengleichung $\Delta u(r, x) = u_{rr}(r, x)$ lautet (2.2)

$$u(r, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{r^{2\nu} \Delta^\nu f(x)}{(2\nu)!}.$$

Die Lösungen (2.2) und (2.7) werden besonders einfach, wenn $f(x)$ eine polyharmonische Funktion ist. Aus $\Delta^i f(x) = 0$ folgt nämlich, daß die Reihen bei $\nu = i$ abbrechen. Liegt der Fall von Satz 2.2 vor und ist dabei noch

$i \leqq q+1$, so verschwinden die logarithmischen Glieder und damit auch die logarithmische Singularität der Lösung. Diese zuletzt genannte Tatsache wurde auf anderem Wege von WEINSTEIN bewiesen ([9], [10, S. 146]; vgl. auch [4, S. 711]).

3. Der Fall $k \geqq n-1$ ($c \geqq n/2$). Es ist bekannt, daß in diesen Fällen die Lösung des Anfangswertproblems explizit als ein geeigneter Mittelwert der Funktion $f(x)$ angegeben werden kann ([4, S. 705—707], [9, S. 143]). Wir geben hier einen neuen Beweis mit abgeschwächten Voraussetzungen bezüglich $f(x)$ [1]).

Zunächst einige Erklärungen. Wir nennen $f(x)$ lokalsummierbar (kurz $f \in L_0$), wenn f über jedes beschränkte Gebiet des E_n integrierbar ist. Der Oberflächenmittelwert von $f(x)$ (bezüglich einer Kugel vom Mittelpunkt x und Radius r) ist erklärt durch

$$M(r,x,f) = \frac{1}{\omega r^{n-1}} \int\limits_{|y-x|=r} f(y)\,dy = \frac{1}{\omega} \int\limits_{|y|=1} f(x+ry)\,dy; \tag{3.1}$$

dabei ist $\omega = 2\pi^m/\Gamma(m)$, $m = n/2$, der Oberflächeninhalt der Einheitskugel und dy jeweils das Oberflächenelement auf der unter dem Integralzeichen angegebenen Fläche (wir benutzen dasselbe Zeichen für Raumelement und Oberflächenelement; dy bedeutet das eine oder das andere, je nachdem, ob das in Rede stehende Integral ein Raum- oder ein Oberflächenintegral ist). Ist $f \in L_0$, so existiert $M(r,x,f)$ bei festem x für fast alle $r>0$ (bei stetigem f natürlich für alle $r>0$), und $r^{n-1}M(r,x,f)$ ist über jedes (endliche) r-Intervall integrierbar [2]).

Daneben werden von einem Parameter $q>0$ abhängende Mittelwerte betrachtet; ihre Definition lautet (in mehreren gleichbedeutenden Formen)

$$\left\{\begin{aligned} M(r,x,f,q) &= \frac{2}{\omega B(m,q) r^n} \int\limits_{|y-x|<r} f(y)\left(1-\frac{|y-x|^2}{r^2}\right)^{q-1} dy \\ &= \frac{2}{\omega B(m,q)} \int\limits_{|y|<1} f(x+ry)\,(1-|y|^2)^{q-1}\,dy \\ &= \frac{2}{B(m,q)\,r^n} \int\limits_0^r M(\varrho,x,f)\,\varrho^{n-1}\left(1-\frac{\varrho^2}{r^2}\right)^{q-1} d\varrho, \end{aligned}\right. \tag{3.2}$$

wobei

$$m = n/2 \quad \text{und} \quad B(m,q) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(q)}{\Gamma(m+q)} = \int\limits_0^1 t^{m-1}(1-t)^{q-1}\,dt \tag{3.3}$$

das Eulersche Integral 1. Gattung ist. Bei stetigem $f(x)$ existiert dieser Mittelwert für $q>0$, für $f \in L_0$ sicher für $q \geqq 1$.

[1]) In den uns zugänglichen Arbeiten wird $f \in C^2$ vorausgesetzt; lediglich GHERMANESCU [5, S. 291f.] beweist (1.1) für $k = n+1, n+3, n+5, \ldots$ und $f \in C^1$.

[2]) Vgl. WALTER [8, S. 96].

Auch hier ist es manchmal zweckmäßig, statt der Mittelwerte $M(r, \ldots)$ die Funktionen $\overline{M}(s, \ldots) = M(\sqrt{s}, \ldots)$ zu betrachten. Für die letzteren gilt nach (3.1) und (3.2)

$$\overline{M}(s, x, f) = \frac{1}{\omega} \int_{|y|=1} f(x + \sqrt{s}\, y)\, dy \tag{3.4}$$

und

$$\overline{M}(s, x, f, q) = \frac{1}{B(m, q)\, s^{m+q-1}} \int_0^s \overline{M}(\sigma, x, f)\, \sigma^{m-1} (s - \sigma)^{q-1}\, d\sigma. \tag{3.5}$$

Der bei den Mittelwerten vor dem Integralzeichen stehende Faktor ist so gewählt worden, daß — wie man aus einem Vergleich von (3.3) und (3.5) erkennt — für $f(x) = 1$ auch $M(r, \ldots) = 1$ für alle betrachteten Mittelwerte ist. Daraus folgt weiter

$$M(r, x, f) \to f(x) \quad \text{und} \quad M(r, x, f, q) \to f(x) \tag{3.6}$$

für stetiges f (dasselbe gilt natürlich für $\overline{M}$ bei $s \to 0$). Um im folgenden Fallunterscheidungen zu vermeiden, führen wir die Definition

$$M(r, x, f) = M(r, x, f, 0); \qquad \overline{M}(s, x, f) = \overline{M}(s, x, f, 0) \tag{3.7}$$

ein. Sie findet ihre Berechtigung in der (leicht zu beweisenden, aber im folgenden nicht benötigten) Tatsache, daß $M(r, x, f, q) \to M(r, x, f)$ strebt für $q \to 0$, falls f stetig ist.

Satz 3.1. *Ist $f(x)$ stetig und i-mal stetig differenzierbar ($i = 0, 1, \ldots$), so gilt dasselbe für $M(r, x, f, q)$, $q \geqq 0$, als Funktion von x (bei festem r), und es ist, wenn $D^j = \partial^j / \partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}$, $j = j_1 + \cdots + j_n$, irgendeine partielle Ableitung der Ordnung $j \leq i$ bedeutet,*

$$D^j M(r, x, f, q) = M(r, x, D^j f, q). \tag{3.8}$$

In der zweiten Integraldarstellung (3.1) bzw. (3.2) darf man nämlich unter dem Integralzeichen differenzieren. Schärfere Ergebnisse werden wir aus dem folgenden Hilfssatz gewinnen.

Hilfssatz 3.1. *Die Funktion $F(t, y)$ sei, wenn die reelle Veränderliche t das Intervall $I: t_0 \leq t \leq t_1$ und der Vektor y den E_n durchläuft, meßbar und für jedes feste y als Funktion von t in I totalstetig. Ferner mögen die L-Integrale*

$$G(t) = {}^{E_n}\!\int F(t, y)\, dy, \qquad H(t) = {}^{E_n}\!\int F_t(t, y)\, dy, \qquad J(t) = {}^{E_n}\!\int |F_t(t, y)|\, dy \tag{3.9}$$

für jedes $t \in I$ existieren und die Funktionen $H(t)$, $J(t)$ in I stetig sein. Dann ist $G(t)$ in I stetig differenzierbar und

$$G_t(t) = {}^{E_n}\!\int F_t(t, y)\, dy. \tag{3.10}$$

Beweis. Nach den Sätzen von Fubini und Tonelli [6, S. 151] ist

$$\int_{t_0}^{t} H(z)\, dz = \int_{t_0}^{t} {}^{E_n}\!\int F_t(z, y)\, dy\, dz = {}^{E_n}\!\int \int_{t_0}^{t} F_t(z, y)\, dz\, dy$$
$$= {}^{E_n}\!\int [F(t, y) - F(t_0, y)]\, dy = G(t) - G(t_0),$$

also $H(t) = G_t(t)$.

Wird unter $(1-z)_*^q$ die Funktion

$$(3.11) \qquad (1-z)_*^q = \begin{cases} (1-z)^q & \text{für } 0 \leq z \leq 1 \\ 0 & \text{für } z > 1 \end{cases}$$

verstanden, so kann statt (3.2) auch

$$(3.12) \qquad M(r,x,f,q) = \frac{2}{\omega B(m,q) r^n} \int_{E_n} f(y) (1-|y-x|^2/r^2)_*^{q-1} dy$$

geschrieben und auf dieses Integral der Hilfssatz angewandt werden. Halten wir $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ und y fest, so ist $(1-|y-x|^2/r^2)_*^{q-1}$ als Funktion von $t = x_i$ totalstetig für $q > 1$ und deshalb

$$(3.13) \qquad \frac{\partial}{\partial x_i} M(r,x,f,q) = \frac{4(q-1)}{\omega B(m,q) r^{n+2}} \int_{E_n} f(y) (y_i - x_i) (1-|y-x|^2/r^2)_*^{q-2} dy,$$

falls auch die übrigen Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllt sind. Dies ist bei stetigem $f(x)$ für $q > 1$, bei lokalsummierbarem $f(x)$ für $q \geq 2$ der Fall [im letzteren Fall dürfen Grenzübergänge $x \to x_0$ in (3.13) unter dem Integralzeichen vorgenommen werden, da $(1-z)_*^{q-2} \leq 1$ ist]. Man erhält so den

Satz 3.2. *Ist $f(x)$ stetig bzw. lokalsummierbar und $q \geq i$ bzw. $q \geq i+1$ $(i = 0, 1, \ldots)$, so ist $M(r,x,f,q)$ als Funktion von x (bei festem $r > 0$) i-mal stetig differenzierbar. Die Formel*

$$(3.14) \qquad D^i M(r,x,f,q) = \frac{2}{\omega B(m,q) r^n} \int_{|y-x|<r} f(y) D^i (1-|y-x|^2/r^2)^{q-1} dy$$

(vgl. zur Bezeichnung Satz 3.1) ist immer dann gültig, wenn f stetig und $q > j$ oder wenn $f \in L_0$ und $q \geq j+1$ ist.

Dieser Satz ist im wesentlichen durch die vorangehenden Bemerkungen bewiesen. Lediglich der Fall, daß f stetig und $q = i$ ist, bedarf noch einer besonderen Überlegung. Es darf dann zunächst gemäß (3.14) $(i-1)$-mal unter dem Integralzeichen differenziert werden. Da aber $D^{i-1}(1-|y-x|^2/r^2)^{i-1}$ ein Polynom in den x_i, y_i ist, entstehen so endlich viele Ausdrücke der Form $P(x) M(r,x,Q(y) f(y), 1)$ (P, Q Polynome), und es bleibt nachzuweisen, daß für stetiges f der Mittelwert $M(r,x,f,1)$ — das ist der gewöhnliche über das Kugelinnere erstreckte Mittelwert — stetig differenzierbar ist. Das ist bekanntlich richtig, und es gilt die Formel (GHERMANESCU [5, S. 290])

$$(3.15) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_i} M(r,x,f,1) = \dfrac{n}{\omega r^{n+1}} \displaystyle\int_{|y-x|=r} f(y) (y_i - x_i) dy \\ \qquad\qquad = \dfrac{n}{r^2} [M(r,x,y_i f) - x_i M(r,x,f)]. \end{cases}$$

Man kann weitere Sätze dieser Art aufstellen unter der Annahme, daß f lokal quadratisch integrierbar oder lokal von der Klasse L_p, $p > 1$, ist. Doch soll hierauf nicht eingegangen werden. Vielmehr wenden wir uns jetzt den nach r bzw. s genommenen Ableitungen zu.

Satz 3.3. *Ist $f(x)$ stetig und $q \geqq 0$ bzw. lokalsummierbar und $q \geqq 1$, so gilt für jedes $\alpha > 0$ die Identität*

$$(3.16)\quad \overline{M}(s,x,f,q+\alpha) = \frac{1}{B(m-q,\alpha)\, s^{m+\alpha+q-1}} \int_0^s z^{m+q-1}(s-z)^{\alpha-1}\overline{M}(z,x,f,q)\,dz.$$

Beweis. Es sei zunächst f stetig und $q>0$ [für $q=0$ ist (3.16) mit (3.5) identisch]. Dann ist nach (3.5) (die Argumente x, f sind weggelassen)

$$\begin{aligned}
&\int_0^s z^{m+q-1}(s-z)^{\alpha-1}\overline{M}(z,q)\,dz \\
&\quad = \frac{1}{B(m,q)} \int_0^s (s-z)^{\alpha-1} \int_0^z \sigma^{m-1}\overline{M}(\sigma,0)\,(z-\sigma)^{q-1}\,d\sigma\,dz \\
&\quad = \frac{1}{B(m,q)} \int_0^s \sigma^{m-1}\overline{M}(\sigma,0) \int_\sigma^s (s-z)^{\alpha-1}(z-\sigma)^{q-1}\,dz\,d\sigma \\
&\quad = \frac{B(\alpha,q)}{B(m,q)} \int_0^s \sigma^{m-1}(s-\sigma)^{\alpha+q-1}\overline{M}(\sigma,0)\,d\sigma.
\end{aligned}$$

Hieraus und aus der Identität

$$B(m,q)\,B(m+q,\alpha) = B(\alpha,q)\,B(m,q+\alpha)$$

folgt (3.16).

Nun sei $f \in L_0$ und $q \geqq 1$. Dann sind die Funktionen $z^m\overline{M}(z,x,f,q)$ und $z^m\overline{M}(z,x,|f|,q)$ für $z \geqq 0$ stetig, die Funktionen $z^{m-1}M(z,x,f,0)$ und $z^{m-1}M(z,x,|f|,0)$ nach z integrierbar. Deshalb sind die gemachten Integralumformungen auch im jetzt vorliegenden Fall erlaubt.

Das in (3.16) rechts stehende Integral ist, wenn $z^{m+q-1}\overline{M}(z,x,f,q)$ für $z \geqq 0$ stetig ist, $[\alpha]$-mal[3]) nach s differenzierbar. Aus dieser Bemerkung erhält man leicht den

Satz 3.4. *Ist $f(x)$ stetig bzw. lokalsummierbar, so ist der Mittelwert $\overline{M}(s,x,f,q)$ für $s>0$ $[q]$-mal bzw. $[q-1]$-mal nach s stetig differenzierbar.*

So ergibt sich z.B., wenn in (3.16) $\alpha = 1$ gesetzt und q durch $q-1$ ersetzt wird, durch Differentiation

$$(3.17)\quad s\overline{M}_s(s,x,f,q) = (m+q-1)\,[\overline{M}(s,x,f,q-1) - \overline{M}(s,x,f,q)],$$

gültig für $f \in C^0$, $q \geqq 1$ oder für $f \in L_0$, $q \geqq 2$. Differenziert man diese Gleichung nochmals, so erhält man nach einfacher Zwischenrechnung

$$(3.18)\quad \begin{cases} s^2\overline{M}_{ss}(s,x,f,q) + (m+q)\,s\overline{M}_s(s,x,f,q) = (m+q-1)\,s\overline{M}_s(s,x,f,q-1) \\ \qquad = (m+q-1)(m+q-2)\,[\overline{M}(s,x,f,q-2) - \overline{M}(s,x,f,q-1)]; \end{cases}$$

[3]) $[\alpha]$ bedeutet die größte ganze Zahl $\leq \alpha$.

dabei ist $f \in C^0$, $q \geqq 2$ oder $f \in L_0$, $q \geqq 3$ vorausgesetzt. Andererseits folgt aus (3.14), da

$$(3.19)\quad \frac{\Delta(1-|x|^2/s)^{q-1}}{B(m,q)} = \frac{4(m+q-1)(m+q-2)}{s}\left[\frac{(1-|x|^2/s)^{q-3}}{B(m,q-2)} - \frac{(1-|x|^2/s)^{q-2}}{B(m,q-1)}\right]$$

ist (das Ergebnis bleibt richtig, wenn x durch $y-x$ ersetzt wird), die Formel

$$(3.20)\quad \begin{cases} \Delta \overline{M}(s,x,f,q) \\ = \dfrac{4(m+q-1)(m+q-2)}{s}\,[\overline{M}(s,x,f,q-2) - \overline{M}(s,x,f,q-1)] \end{cases}$$

für $f \in C^0$, $q > 2$ oder $f \in L_0$, $q \geqq 3$. Bei stetigem $f(x)$ ist das auch noch für $q = 2$ richtig; denn zunächst ist nach (3.13)

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{M}(s,x,f,2) = \frac{2(m+1)}{s}\,[\overline{M}(s,x,y_i f,1) - x_i \overline{M}(s,x,f,1)],$$

sodann nach (3.15)

$$\Delta \overline{M}(s,x,f,2) = \frac{2(m+1)}{s}\left[-n\overline{M}(s,x,f,1) + \right.$$
$$\left. + \frac{n}{s}\sum_{i=1}^{n}\{\overline{M}(s,x,y_i^2 f) - 2x_i\overline{M}(s,x,y_i f) + x_i^2 \overline{M}(s,x,f)\}\right],$$

woraus wegen $n = 2m$, $s = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i y_i + y_i^2)$ die behauptete Gl. (3.20) folgt. Es gilt also nach (3.18) und (3.20) der

Satz 3.5. *Der Mittelwert $\overline{M}(s,x,f,q)$ ist für stetiges f und $q \geqq 2$ sowie für lokalsummierbares f und $q \geqq 3$ eine im Gebiet $s > 0$ zweimal stetig differenzierbare Lösung der EPD-Gleichung*

$$(3.21)\quad s\overline{M}_{ss}(s,x,f,q) + (m+q)\,\overline{M}_s(s,x,f,q) - \tfrac{1}{4}\Delta\overline{M}(s,x,f,q) = 0.$$

Die Beziehung

$$(3.22)\qquad \overline{M}(s,x,f,q) \to f(x) \quad \text{für } s \to 0$$

gilt bei stetigem $f(x)$ für alle x [4]*, bei lokalsummierbarem $f(x)$ für fast alle x, insbesondere in jedem Punkt x, für den $\overline{M}(s,x,f,1) \to f(x)$ strebt für $s \to 0$* [5].

Übrigens folgt aus $\overline{M}(s,x,f,1) \to f(x)$ die Relation (3.22) mit Hilfe von (3.16) sogar für $q \geqq 1$.

Satz 3.6. *Ist $f(x)$ stetig differenzierbar, so ist $\overline{M}(s,x,f,q)$ für $q \geqq 1$ eine Lösung von (3.21) mit den Randwerten*

$$(3.23)\quad \overline{M}(0,x,f,q) = f(x),\ \overline{M}_{x_i}(0,x,f,q) = f_{x_i}(x),\ \sqrt{s}\,\overline{M}_s(s,x,f,q) \to 0\ (s \to 0)$$ [4].

[4]) Die Konvergenz ist gleichmäßig, wenn x einen beschränkten Bereich durchläuft.

[5]) Nach einem bekannten Satz von LEBESGUE [7, S. 118] existiert der zuletzt angeschriebene Grenzwert für fast alle x.

Beweis. Nach (3.8) und (3.13) ist für $q>1$

$$\Delta \overline{M}(s,x,f,q)=\frac{4(q-1)}{\omega\, B(m,q)\, s^{m+1}}\sum_{i=1}^{n}\int_{E_n} f_{x_i}(y)\,(y_i-x_i)\,(1-|y-x|^2/s)_*^{q-2}\,dy,$$

also

$$\text{(3.24)}\qquad \begin{cases} \Delta \overline{M}(s,x,f,q) \\ =\dfrac{2(m+q-1)}{s}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}[\overline{M}(s,x,y_i f_{x_i},q-1)-x_i\,\overline{M}(s,x,f_{x_i},q-1)], \end{cases}$$

während aus (3.4)

$$\text{(3.25)}\qquad \begin{cases} \overline{M}_s(s,x,f)=\dfrac{1}{2\omega\sqrt{s}}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\int_{|y|=1} f_{x_i}(x+\sqrt{s}\,y)\,y_i\,dy \\ \qquad\qquad =\dfrac{1}{2s}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}[\overline{M}(s,x,y_i f_{x_i})-x_i\,\overline{M}(s,x,f_{x_i})] \end{cases}$$

und damit aus (3.5)

$$\text{(3.26)}\qquad \begin{cases} \overline{M}_s(s,x,f,q-1)=\dfrac{1}{B(m,q-1)}\dfrac{\partial}{\partial s}\displaystyle\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{q-2}\,\overline{M}(st,x,f)\,dt \\ =\dfrac{1}{B(m,q-1)}\displaystyle\int_0^1 t^{m}(1-t)^{q-2}\,\dfrac{1}{2st}\sum_{i=1}^{n}[\overline{M}(st,x,y_i f_{x_i})-x_i\,\overline{M}(st,x,f_{x_i})]\,dt \\ =\dfrac{1}{2s}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}[\overline{M}(s,x,y_i f_{x_i},q-1)-x_i\,\overline{M}(s,x,f_{x_i},q-1)] \end{cases}$$

folgt. Hieraus, aus (3.24) und aus der ersten Gl. (3.18) (die im vorliegenden Fall offenbar gültig ist) ergibt sich die behauptete Gl. (3.21). Ist $q=1$, so ist (3.24) eine unmittelbare Folgerung aus (3.8) und (3.15), und (3.26) ist mit (3.25) identisch.

Schließlich gilt nach (3.25) für $s\to 0$

$$\sqrt{s}\,M_s(s,x,f)=\frac{1}{2\omega}\sum_{i=1}^{n}\int_{|y|=1} y_i f_{x_i}(x+\sqrt{s}\,y)\,dy\to\frac{1}{2\omega}\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x)\int_{|y|=1} y_i\,dy=0.$$

Daraus erhält man in einfacher Weise die Limesrelation in (3.23), sogar für alle $q\geqq 0$, während die beiden dort stehenden Gleichungen nach (3.6) und (3.8) richtig sind.

Der Vollständigkeit halber führen wir noch einen im wesentlichen bekannten Satz an.

Satz 3.7. *Der Mittelwert $\overline{M}(s,x,f,q)$ ist für zweimal stetig differenzierbares $f(x)$ und $q\geqq 0$ eine Lösung von* (3.21) *mit den Randwerten (die Argumente f,q*

sind weggelassen)

$$(3.27)\quad \begin{cases} \overline{M}(0,x) = f(x), \quad \overline{M}_{x_i}(0,x) = f_{x_i}(x), \quad \overline{M}_{x_i x_j}(0,x) = f_{x_i x_j}(x), \\ \overline{M}_s(0,x) = \dfrac{\Delta f(x)}{4(m+q)}, \quad s\overline{M}_{ss}(s,x) \to 0 \qquad (s \to 0)\ ^4). \end{cases}$$

Die ersten drei Gln. (3.27) ergeben sich wieder unmittelbar aus (3.6) und (3.8). Aus (3.25) erhält man durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf das mittlere Integral

$$(3.28)\qquad \overline{M}_s(s,x,f) = \frac{1}{2n}\overline{M}(s,x,\Delta f,1)$$

und hieraus mit (3.5)

$$\overline{M}_s(s,x,f,q) = \frac{1}{B(m,q)}\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{q-1}\frac{\partial}{\partial s}\overline{M}(st,x,f)\,dt$$

$$= \frac{1}{2n\,B(m,q)}\int_0^1 t^m(1-t)^{q-1}\overline{M}(st,x,\Delta f,1)\,dt,$$

also nach (3.16)

$$(3.29)\qquad \overline{M}_s(s,x,f,q) = \frac{1}{4(m+q)}\overline{M}(s,x,\Delta f,q+1).$$

Daraus folgt sowohl die Differentialgleichung (3.21) [mit Hilfe von (3.17), angewandt auf die rechte Seite] als auch die vierte der Beziehungen (3.27), während die letzte dieser Beziehungen nach den vorangehenden und (3.21) gültig ist.

4. Bemerkungen zum Randverhalten der Lösungen. Bei analytischen Randwerten weiß man hierüber nach (2.5), (2.10) und (2.11) genau Bescheid. Hier soll die Frage, ob bei nichtanalytischen, aber hinreichend oft differenzierbaren Anfangswerten wenigstens ein Teil dieser Gleichungen richtig bleibt, untersucht werden. Die Ausnahmewerte $c = 0, -1, -2, \ldots$ werden nicht in Betracht gezogen.

Die angewandte Methode rührt im wesentlichen von WEINSTEIN [9] her. In einer späteren Arbeit [10] gab WEINSTEIN einen anderen Existenzbeweis für das Anfangswertproblem, der weniger Regularitätsvoraussetzungen der Anfangswerte benötigt, bei dem aber das Verhalten der Lösungen in der Nähe von $s = 0$ nicht unmittelbar ersichtlich ist.

Satz 4.1. *Die Funktion $\bar{u}(s,x)$ sei eine Lösung $u^{(c+i)}$ (i natürliche Zahl) von (1.3) (mit $c+i$ an Stelle von c), welche stetige Randwerte $\bar{u}(0,x) = g(x)$ annimmt. Ferner mögen die Ableitungen $\bar{u}_s, \bar{u}_{x_i}, \bar{u}_{x_i x_i}$ für kleine s dem Betrage nach $\leq C s^{\alpha-1}$, $\alpha > 0$, sein*[6]*). Dann ist die Funktion*

$$(4.1)\qquad \overline{w}(s,x) = \int_0^s (s-\sigma)^{i-1}\,\bar{u}(\sigma,x)\,d\sigma$$

[6]) C und α sollen, wenn x einen beschränkten Bereich durchläuft, unabhängig von x gewählt werden können.

eine Lösung der Differentialgleichung

$$s\,\overline{w}_{ss} + c\,w_s - \tfrac{1}{4}\,\Delta\,\overline{w} = (c+i-1)\,s^{i-1}g(x). \tag{4.2}$$

Beweis. Da nach den Voraussetzungen unter dem Integralzeichen differenziert werden darf, ist für $i \geqq 3$

$$\tfrac{1}{4}\,\Delta\,\overline{w}(s,x) = \tfrac{1}{4}\int_0^s (s-\sigma)^{i-1}\,\Delta\,\overline{u}(\sigma,x)\,d\sigma = \int_0^s (s-\sigma)^{i-1}\,[\sigma\,\overline{u}_\sigma + (c+i-1)\,\overline{u}]_\sigma\,d\sigma$$

$$= (s-\sigma)^{i-1}\,(\sigma\,\overline{u}_\sigma + (c+i-1)\,\overline{u})\,\big|_0^s + (i-1)\int_0^s (s-\sigma)^{i-2}\,[\sigma\,\overline{u}_\sigma + (c+i-1)\,\overline{u}]\,d\sigma$$

$$= -(c+i-1)\,s^{i-1}g(x) + (c+i-1)\,\overline{w}_s(s,x) + (i-1)\,(s-\sigma)^{i-2}\sigma\,\overline{u}\,\big|_0^s +$$

$$+ (i-1)\int_0^s \overline{u}\,[(i-2)\,s\,(s-\sigma)^{i-3} - (i-1)\,(s-\sigma)^{i-2}]\,d\sigma$$

$$= -(c+i-1)\,s^{i-1}g(x) + (c+i-1)\,\overline{w}_s + s\,\overline{w}_{ss} - (i-1)\,\overline{w}_s,$$

woraus die Behauptung folgt. Für $i=1$ und $i=2$ sind im Beweis kleine Änderungen anzubringen.

Satz 4.2. *Ist i eine natürliche Zahl und $f(x) \in C^{2i+2}$, so ist*

$$\overline{u}(s,x) = \sum_{\nu=0}^{i-1} \frac{s^\nu\,\Delta^\nu f(x)}{4^\nu\,\nu!\,(c)_\nu} + \frac{1}{4^i(i-1)!\,(c)_i}\int_0^s (s-\sigma)^{i-1}\,\overline{M}(\sigma,x,\Delta^i f, c+i-m)\,d\sigma \tag{4.3}$$

für $c+i \geqq m$, $c \neq 0, -1, \ldots$, eine Lösung des Anfangswertproblems (1.3), (1.4). *Sie nimmt die Randwerte*

$$\frac{\partial^j \overline{u}(0,x)}{\partial s^j} = \frac{\Delta^j f(x)}{4^j (c)_j} \qquad \text{für } j = 0, 1, \ldots, i+1 \tag{4.4}$$

an.

Der Beweis ist sehr einfach. Wird der Operator $\overline{L}$ auf das Integral bzw. auf die endliche Summe in (4.3) angewandt, so ergibt sich beide Male [für das Integral nach (4.2), für die Summe nach dem Beweis zu (2.2)] der Wert $s^{i-1}\Delta^i f(x)/[4^i(i-1)!\,(c)_{i-1}]$, jedoch mit umgekehrten Vorzeichen. Die Gl. (4.4) ist für $j<i$ unmittelbar klar, für $j=i$ ist nach (4.3)

$$\frac{\partial^i \overline{u}(s,x)}{\partial s^i} = \frac{1}{4^i (c)_i}\,\overline{M}(s,x,\Delta^i f, c+i-m),$$

für $j=i+1$ wende man (3.29) (mit $\Delta^i f$ an Stelle von f) auf die rechte Seite dieser Gleichung an.

Die Sätze 2.1 und 4.2 stehen in enger Beziehung zueinander. Der letztere ist gewissermaßen eine Verallgemeinerung des ersten auf nichtanalytische Anfangswerte, während man diesen wiederum aus dem bei analytischen Anfangswerten für jedes hinreichend große i gültigen Satz 4.2 hervorgegangen denken kann [in der Tat ist es möglich, die Formel (2.2) aus (4.3) herzuleiten].

5. Bemerkungen zum Eindeutigkeitssatz und zur Aufgabenstellung. Für $k \geqq 0$ besteht der folgende Satz ([1, S. 330], [3, S. 381]): Ist $u(r, x) = u^{(k)}$ eine Lösung von (1.1) und gilt $u(0, x) = 0$, $u_r(r, x) \to 0$, $u_{x_i}(r, x) \to 0$ $(r \to 0;$ $i = 1, \ldots, n)$[7]), so verschwindet u identisch.

Nach diesem Satz ist eine Lösung $u(r, x)$ von (1.1) für $k \geqq 0$ durch die vier Forderungen

(α) u ist zweimal stetig differenzierbar für $r > 0$;
(β) u ist stetig differenzierbar für $r \geqq 0$;
(γ) $u(0, x) = f(x)$;
(δ) $u_r(0, x) = 0$;

eindeutig bestimmt. (β) und (γ) sind nur für $f \in C^1$ miteinander verträglich, d.h. die Eindeutigkeit der Lösung ist nur für stetig differenzierbare Anfangswerte gesichert. Die Bedingungen (β), (γ), (δ) lassen sich auch durch andere ersetzen (vgl. dazu die erste Fußnote), etwa durch

(β') u ist stetig für $r \geqq 0$;
(γ') $u(0, x) = f(x) \in C^1$;
(δ') gleichmäßig in jedem beschränkten Gebiet des E_n gilt $u_{x_i}(r, x) \to f_{x_i}(x)$, $u_r(r, x) \to 0$ $(r \to 0)$.

Durch eine Abänderung des üblichen Eindeutigkeitsbeweises können diese Aussagen verschärft werden (vgl. zum folgenden [3, S. 381—382]). Es sei ξ ein fester Punkt des E_n und $|x - \xi| = R - r$ $(R > 0)$ ein charakteristischer Kegel. Wir integrieren die für jedes reelle α und jede Lösung $u = u^{(k)}$ gültige Identität

$$2r^\alpha u_r L(u) = \left[r^\alpha \left(u_r^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\right)\right]_r - 2\sum_i (r^\alpha u_{x_i} u_r)_{x_i} + r^{\alpha-1}\left[(2k - \alpha)\, u_r^2 - \alpha \sum_i u_{x_i}^2\right] = 0$$

über den Kegelstumpf G: $|x - \xi| \leqq R - r$, $0 < r_1 \leqq r \leqq r_2 < R$; mit den Abkürzungen

$$(5.1) \qquad \begin{cases} E(r) = \int\limits_{|x-\xi|<R-r} u_r^2(r, x)\, dx, \quad F(r) = \int\limits_{|x-\xi|<R-r} \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(r, x)\, dx, \\ G(r) = E(r) + F(r) \end{cases}$$

erhalten wir durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes

$$0 = \int_{r_1}^{r_2} r^{\alpha-1}[2kE(r) - \alpha G(r)]\, dr + Q,$$

[7]) Die letzte Bedingung wird a.a.O. nicht ausdrücklich formuliert, aber beim Beweis benötigt. Macht man die zusätzliche Voraussetzung, daß $u \in C^1$ für $r \geqq 0$ sein soll, so ist sie natürlich von selbst erfüllt. Es sei aber erwähnt, daß für eine für $r > 0$ zweimal stetig differenzierbare Funktion $v(r, x)$ mit $v(0, x) = 0$, $v_r(r, x) \to 0$ $(r \to 0)$ nicht notwendig $v_{x_i}(r, x) \to 0$ strebt. Gegenbeispiel:

$$v(r, x) = \frac{1}{i^3} \sin(i^4 x_1)\, [\sin(i(i+1)r)]^3 \quad \text{für} \quad \frac{\pi}{i+1} \leq r \leq \frac{\pi}{i}, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

wo Q ein über die Oberfläche von G zu erstreckendes Flächenintegral ist, dessen Integrand gleich dem skalaren Produkt aus dem Vektor

$$r^\alpha\left(u_r^2+\sum_i u_{x_i}^2,\,-2u_{x_1}u_r,\ldots,-2u_{x_n}u_r\right)$$

und dem nach außen weisenden Normalenvektor $(r^\nu, x_1^\nu, \ldots, x_n^\nu)$ ist. Die der Ober- und Unterseite von G entsprechenden Anteile von Q sind gerade $r_2^\alpha G(r_2)$ und $-r_1^\alpha G(r_1)$, während auf dem Kegelmantel $\sum_i (x_i^\nu)^2=(r^\nu)^2$ und $r^\nu=\sqrt{2}/2$, also der Integrand gleich

$$\frac{1}{r^\nu}\sum_{i=1}^{n} r^\alpha(u_r x_i^\nu - u_{x_i} r^\nu)^2 \geqq 0 \tag{5.2}$$

ist. Bezeichnen wir das Integral über den Kegelmantel mit $P(r_1, r_2)\geqq 0$, so ist also

$$\int_{r_1}^{r_2} r^{\alpha-1}[2kE(r)-\alpha G(r)]\,dr + r_2^\alpha G(r_2) - r_1^\alpha G(r_1) + P(r_1,r_2)=0. \tag{5.3}$$

Wenn dann $\alpha>0$ ist und u den Bedingungen (α), (β), (γ) genügt, so folgt hieraus für $r_1\to 0$

$$G(r_2)+r_2^{-\alpha}P(0,r_2)+r_2^{-\alpha}\int_0^{r_2} r^{\alpha-1}[2kE(r)-\alpha G(r)]\,dr=0. \tag{5.4}$$

Führen wir hierin den Grenzübergang $r_2\to 0$ durch, so strebt der zweite Summand gegen Null, da das $r_2^{-\alpha}$-fache des Integranden nach (5.2) beschränkt ist und der Inhalt des Integrationsbereiches (nämlich der Mantelfläche) gegen 0 geht. So ergibt sich aus (5.4)

$$G(0)+\frac{2k}{\alpha}E(0)-G(0)=\frac{2k}{\alpha}E(0)=0.$$

Damit haben wir das bemerkenswerte Ergebnis:

Für $k\neq 0$ ist die Bedingung (δ) von selbst erfüllt. Oder anders gesagt: Bei der Formulierung des Anfangswertproblems kann die Bedingung (δ) weggelassen werden.

Bei der Wellengleichung ($k=0$) wird neben (1.1), (1.2) noch ein anderes Anfangswertproblem betrachtet, bei dem auf dem Rande ($r=0$) u verschwinden und die Ableitung u_r vorgeschriebene Werte annehmen soll. Dieses Problem ist für $k\neq 0$ — so kann man das obige Ergebnis auch aussprechen — sinnlos, d.h. es läßt keine Lösung zu [jedenfalls keine den Bedingungen (α) und (β) genügende].

Aus (5.3) kann noch mehr gefolgert werden. Ist $k>0$ und die Lösung u so beschaffen, daß neben (α), (β'), (γ') und der ersten Bedingung in (δ') noch $r^k u_r(r,x)\to 0$ $(r\to 0)$ [8]) gilt, so erhält man aus (5.3) mit $\alpha=2k$ für $r_1\to 0$

$$r_2^\alpha G(r_2)\leqq \alpha\int_0^{r_2} r^{\alpha-1}F(r)\,dr = r_2^\alpha F(r^*) \quad \text{mit } 0\leqq r^*\leqq r_2,$$

[8]) Der Limes soll gleichmäßig in jedem beschränkten x-Gebiet existieren.

woraus $E(r) \to 0$ $(r \to 0)$ folgt. Strebt darüber hinaus auch $F(r) \to 0$ für $r \to 0$, so kann man in (5.3) jetzt $\alpha = 0$ setzen und $r_1 \to 0$ streben lassen. Da dann auf der linken Seite von (5.3) nur nichtnegative Glieder stehen, ergibt sich der Eindeutigkeitssatz in folgender verschärfter Form.

Eindeutigkeitssatz. *Ist $k > 0$ und $u(r, x)$ eine Lösung der EPD-Gleichung, die für $r \to 0$ zusammen mit den Ableitungen u_{x_i} verschwindet, während für die Ableitung u_r die Relation $r^k u_r(r, x) \to 0$ $(r \to 0)$ gilt*[8]*, dann ist $u = 0$ für $r \geq 0$.*

Die Bedingung $r^k u_r \to 0$ kann, wie das folgende Beispiel zeigt, nicht abgeschwächt werden. Ist nämlich $g(x)$ eine ganze harmonische Funktion, so ist $u = r^{1-k} g(x)$ eine Lösung von (1.1). Diese verschwindet, falls $0 < k < 1$ ist, für $r = 0$ zusammen mit ihren Ableitungen u_{x_i}, während die Ableitung u_r sich für $r \to 0$ wie r^{-k} verhält.

Ein weiteres interessantes Ergebnis erhält man aus (5.3), wenn man diese Formel nach r_2 differenziert:

$$2k r^{\alpha-1} E(r) + r^{\alpha} G'(r) + \frac{\partial}{\partial r} P(r_1, r) = 0 \qquad (r > r_1).$$

Das Integral $P(r_1, r)$ ist mit r monoton wachsend (für jedes feste r_1), da der Integrand nichtnegativ ist und das Integrationsgebiet größer wird. Da außerdem $E(r) \geq 0$ ist, ergibt sich:

Ist $u(r, x)$ irgendeine Lösung der EPD-Gl. (1.1) *und $k \geq 0$, so hat für jeden charakteristischen Kegel die durch* (5.1) *definierte Funktion $G(r)$ im Intervall $0 < r < R$ eine Ableitung $G'(r) \leq 0$.*

Es sei zum Schluß bemerkt, daß hieraus sofort der zu Anfang der Nummer formulierte Eindeutigkeitssatz folgt.

Literatur

[1] ASGEIRSSON, L.: Über eine Mittelwerteigenschaft von Lösungen homogener linearer partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Math. Ann. **113**, 321—346 (1937). — [2] BLUM, E. K.: The Euler-Poisson-Darboux-equation in the exceptional case. Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 511—520 (1954). — [3] COURANT, R., u. D. HILBERT: Methoden der mathematischen Physik, Bd. 2. Berlin 1937. — [4] DIAZ, J. B., and H. F. WEINBERGER: A solution of the singular initial value problem for the Euler-Poisson-Darboux-equation. Proc. Amer. Math. Soc. **4**, 703—715 (1953). — [5] GHERMANESCU, M.: Sur les valeurs moyennes des fonctions. Math. Ann. **119**, 288—320 (1944). — [6] KAMKE, E.: Das Lebesgue-Stieltjes-Integral. Leipzig 1956. — [7] SAKS, S.: Theory of the integral. Warschau 1937. — [8] WALTER, W.: Mittelwertsätze und ihre Verwendung zur Lösung von Randwertaufgaben. Jahresber. DMV **59**, 93—131 (1957). — [9] WEINSTEIN, A.: Sur le problème de Cauchy pour l'equation de Poisson et l'equation des ondes. C. R. Acad. Sci. Paris **234**, 2584—2585 (1952). — [10] WEINSTEIN, A.: On the wave equation and the equation of Euler-Poisson. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Vol. V. 1954. — [11] WEINSTEIN, A.: Elliptic and hyperbolic axially symmetric problems. Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1954. Vol. III. Amsterdam 1956. S. 264—269.

Mathematisches Institut der Universität Tübingen

(Eingegangen am 12. Dezember 1956)

Collingwood, E. F.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 377—396 (1957)

On sets of maximum indetermination of analytic functions

By

E. F. Collingwood

Dedicated to the memory of Georges Valiron

Introduction

1. The notion of a set of maximum indetermination of a function at a frontier point or set has given rise to significant theorems of a new type in the theory of cluster sets. The purpose of this paper is to develop in further detail the investigation of sets of maximum indetermination and their bearing upon the general theory begun in recent notes[1]). Although the ideas and methods are applicable to other classes of continuous functions, such for example as light interior mappings[2]), and to more general domains, we shall restrict ourselves for the most part to functions meromorphic in the unit circle since this is both the most familiar and the most important case.

We thus take $w = f(z)$ to be meromorphic in $|z| < 1$. In the usual notation[3]) $C(f)$ denotes the cluster set of $f(z)$ in the large, i.e. with respect to the whole circumference $\varkappa\{z : |z| = 1\}$, defined as follows: $a \in C(f)$ if there is a sequence $\{z_n\}$, $|z_n| < 1$, $\lim_{n\to\infty} |z_n| = 1$, such that $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = a$. Similarly, $C(f, e^{i\vartheta})$ is the cluster set of $f(z)$ at the point $z = e^{i\vartheta}$ defined by substituting the condition $\lim_{n\to\infty} z_n = e^{i\vartheta}$ for the condition $\lim_{n\to\infty} |z_n| = 1$ above. If $\mathcal{G}$ is a sub-set of the open disc $|z| < 1$ whose closure $\overline{\mathcal{G}}$ intersects $\varkappa$ we define the partial cluster set $C_{\mathcal{G}}(f)$ of $f(z)$ on $\mathcal{G}$ by adding the condition $z_n \in \mathcal{G}$ to the conditions on $\{z_n\}$ in the definition of $C(f)$. Similarly, if $\overline{\mathcal{G}}$ contains $e^{i\vartheta}$ we define $C_{\mathcal{G}}(f, e^{i\vartheta})$ by adding the condition $z_n \in \mathcal{G}$ to those in the definition of $C(f, e^{i\vartheta})$. It is convenient to have a conventional notation for certain special sets $\mathcal{G}$. Thus, if $\mathcal{G}$ is the radius to a point $e^{i\vartheta}$ we write $C_\varrho(f, e^{i\vartheta})$ for the (radial) cluster set upon it; and we write $C_{\varrho(\varphi)}(f, e^{i\vartheta})$ for the cluster set upon the chord to $e^{i\vartheta}$ making the angle φ, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, with the radius to that point. More generally, we shall use λ_ϑ to denote a curve terminating at $e^{i\vartheta}$ and derived from a curve λ_0 terminating at $z = 1$ by rotating it about the origin through

---

[1]) Collingwood (2), (3) and (5). Numbers after authors' names refer to the list of references at the end.

[2]) For the definition see Whyburn (1). Stoilow (1), to whom the systematic development of the theory is due, calls such a mapping simply an interior mapping.

[3]) The general reference for definitions and notation in the theory of cluster sets is to Collingwood and Cartwright (1) and Collingwood (1).

the angle ϑ, $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$. σ will denote a spiral path converging to $\varkappa$. The cluster sets upon these curves are denoted by $C_{\lambda\vartheta}(f, e^{i\vartheta})$ and $C_\sigma(f)$ respectively. A monotonic path λ_ϑ or σ is one which intersects every circle $|z| = r < 1$ in at most one point. A Stolz angle at $e^{i\vartheta}$ will be denoted by Δ and the cluster set in it by $C_\Delta(f, e^{i\vartheta})$. The set $\mathcal{G}$ need not, however, be a continuum although for our purposes it is subject to a density condition. Other notations will be introduced as required.

2. Evidently, $C_\mathcal{G}(f) \subseteqq C(f)$ and $C_\mathcal{G}(f, e^{i\vartheta}) \subseteqq C(f, e^{i\vartheta})$. A set $\mathcal{G}$ is said to be *a set of maximum indetermination of $f(z)$ in the large* if $C_\mathcal{G}(f) = C(f)$, or *of maximum indetermination at $e^{i\vartheta}$* if $C_\mathcal{G}(f, e^{i\vartheta}) = C(f, e^{i\vartheta})$; and the sets $C_\mathcal{G}(f)$ and $C_\mathcal{G}(f, e^{i\vartheta})$ in these cases are *maximal*. The notion is a relative one and can clearly be extended to any two sets $\mathcal{G}_1$, and $\mathcal{G}_2 < \mathcal{G}_1$, where both have limit points on $\varkappa$. The following theorem which generalises an earlier theorem on total cluster sets[4]), is typical. It has been proved[5]) for λ_ϑ monotonic.

Theorem A. *If $f(z)$ is meromorphic in $|z| < 1$, then*

$$C_{\lambda\vartheta}(f, e^{i\vartheta}) = C(f, e^{i\vartheta})$$

for all ϑ belonging to a residual sub-set of the closed interval $(0, 2\pi)$.

In particular, the radial cluster set $C_\varrho(f, e^{i\vartheta})$ is maximal in a residual set of points of $\varkappa$, a result which supplements and, in a sense, contrasts with FATOU's theorem in the case of a bounded function. For, by that theorem, $C_\varrho(f, e^{i\vartheta})$ is degenerate, that is consists of a single point, almost everywhere on $\varkappa$. But if $C(f, e^{i\vartheta})$ is non-degenerate (and therefore is a continuum) at every point of $\varkappa$ it follows from Theorem A that $C_\varrho(f, e^{i\vartheta})$ is non-degenerate in a residual set and hence that the set of Fatou points $F(f)$ is of the first category. A specific example which illustrates the significance of the theorem is furnished by the Blaschke product

$$B(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{z e^{-i\vartheta_\nu} - |\zeta_\nu|}{1 - z\bar{\zeta}_\nu},$$

where

$$|\zeta_\nu| < 1, \quad \arg \zeta_\nu = \vartheta_\nu, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} (1 - |\zeta_\nu|) < \infty$$

and the points ζ_ν are so distributed that the closure of their union contains $\varkappa$. Then[6]), for all ϑ, $C(B, e^{i\vartheta}) = \Omega\{w : |w| \leq 1\}$ and so, by Theorem A, $C_\varrho(f, e^{i\vartheta}) = \Omega$ in a residual set of points of $\varkappa$. Another consequence of Theorem A, applied to univalent functions, is that the prime ends of a simply connected domain which contain subsidiary points are a sub-set of category I of the set of prime

[4]) COLLINGWOOD (1) and (4).

[5]) COLLINGWOOD (2).

[6]) This carries further an observation of EGGLESTON (1). See also BAGEMIHL and SEIDEL (1), p. 1070.

ends of the domain. This gives the complete solution of a well known problem of CARATHEODORY [7]).

3. The present paper is in two parts: Part 1 is concerned with pointwise cluster sets, that is to say cluster sets on a set $\mathscr{G}$ at a limit point $e^{i\vartheta}$ of $\mathscr{G}$. The methods are similar to those of my paper (1). Theorem 1, proved in § 4, generalises Theorem A, the monotonic curve λ_ϑ being replaced by a set $\mathscr{G}_\vartheta$ derived by rotation from an initial set $\mathscr{G}_0$. We next, in §§ 5—6, consider the set $J(f)$ of points $e^{i\vartheta}$ at which, for every Stolz angle Δ, the cluster set $C_\Delta(f, e^{i\vartheta})$ is maximal and the larger set $K(f)$ of points $e^{i\vartheta}$ at which, given any pair of Stolz angles Δ_1 and Δ_2, $C_{\Delta_1}(f, e^{i\vartheta}) = C_{\Delta_2}(f, e^{i\vartheta})$. $J(f)$ and therefore $K(f)$ also are shown to be residual. $K(f)$ is of interest since it contains both the Fatou points and the Plessner points [8]) of $f(z)$. On the same principle we prove in § 7 that the boundary cluster sets at $e^{i\vartheta}$ are also maximal in a residual set on $\varkappa$. In § 8 we extend to points of $K(f)$ a previous theorem on Plessner points and in § 9 we consider the so-called principal values [9]) of $C(f, e^{i\vartheta})$ and show that for certain classes of functions these cover $C(f, e^{i\vartheta})$ at a residual set on $\varkappa$, thus generalising the result on prime ends referred to above.

In Part 2 we consider the cluster set $C_\sigma(f)$ of $f(z)$ on an arbitrary spiral path σ in $|z|<1$ which converges to the circumference $\varkappa$ and we prove a theorem (Theorem 10) from which it follows that for certain classes of functions this is maximal for all such paths, with a weaker result in more general cases. There are two proofs of independent interest, one based on a recent theorem of COLLINGWOOD and CARTWRIGHT and the other on an earlier theorem of GROSS and IVERSEN. These are given in §§ 10—11. The methods of Part 1 are not relevant and there is no theorem analogous to Theorem 1 for a rotational family of spirals valid for all meromorphic functions. We conclude in §§ 12—14 with some remarks on the application of our methods and results to more general domains and classes of functions and we prove the analogues of our main theorems for circle domains of finite connectivity.

Part 1

4. Maximum indetermination on rotations of a given set

Let $\mathscr{G}_0$ be a set in $|z|<1$ such that (i) the set $E\{|z| : z \in \mathscr{G}_0\}$ is dense in an interval $r_0<|z|<1$ and (ii) given $\eta>0$ there is a $\delta>0$ such that $|\arg z|<\eta$ for all $z \in \mathscr{G}_0$ contained in the annulus $1-\delta<|z|<1$. We denote by $\mathscr{G}_\vartheta$ the transform of $\mathscr{G}_0$ by rotation about the origin through the angle ϑ so that $\mathscr{G}_\vartheta$ has $z=e^{i\vartheta}$ as its only limit point on $\varkappa$. We now prove

Theorem 1. *If $f(z)$ is meromorphic in $|z|<1$ and if $\{\mathscr{G}_\vartheta\}$ is the family of rotations of a given set which satisfies conditions* (i) *and* (ii), *then for a residual*

[7]) The proof is given in COLLINGWOOD (6). We write category I and II for first and second category.

[8]) For the definitions see § 6 below and footnote 11.

[9]) The notion of principal value defined in the first place by CARATHEODORY for Prime Ends was extended by GROSS (1) to the cluster sets of multi-valent functions.

set of values of ϑ *in* $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$, $\mathcal{G}_\vartheta$ *is a set of maximum indetermination of* $f(z)$ *at* $e^{i\vartheta}$ i.e.

$$C_{\mathcal{G}_\vartheta}(f, e^{i\vartheta}) = C(f, e^{i\vartheta}). \tag{1}$$

We shall show that the hypothesis $C_{\mathcal{G}_\vartheta}(f, e^{i\vartheta}) \neq C(f, e^{i\vartheta})$ in a set of values of ϑ of category II in $(0, 2\pi)$ leads to a contradiction. The set $C_{\mathcal{G}_\vartheta}(f, e^{i\vartheta})$, like $C(f, e^{i\vartheta})$, is closed and we denote by $C_{\mathcal{G}_\vartheta}(f, e^{i\vartheta})_{+\varepsilon}$ the closed set of points on the unit w-sphere, which we take as the image space of $|z|<1$ by $f(z)$, whose (spherical) distance from $C_{\mathcal{G}_\vartheta}(f, e^{i\vartheta})$ does not exceed ε, where $\varepsilon > 0$. Now since $C_{\mathcal{G}_\vartheta}(f, e^{i\vartheta}) \subseteqq C(f, e^{i\vartheta})$ it follows that if $C_{\mathcal{G}_\vartheta}(f, e^{i\vartheta}) \neq C(f, e^{i\vartheta})$ there is a positive ε such that $C(f, e^{i\vartheta}) \cap \mathcal{C}\big(C_{\mathcal{G}_\vartheta}(f, e^{i\vartheta})_{+\varepsilon}\big)$ is not empty[10]). We choose a decreasing positive sequence $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n \to 0$ as $n \to \infty$. For a given n let E_n be the set of points $z = e^{i\vartheta}$ such that $C(f, e^{i\vartheta}) \cap \mathcal{C}\big(C_{\mathcal{G}_\vartheta}(f, e^{i\vartheta})_{+\varepsilon_n}\big)$ is not empty. Plainly E_n may be empty; and $E_1 \subseteqq E_2 \subseteqq \cdots \subseteqq E_n \subseteqq \cdots$. Denoting by E the set of points $e^{i\vartheta}$ for which $C_{\mathcal{G}_\vartheta}(f, e^{i\vartheta}) \neq C(f, e^{i\vartheta})$ we see that

$$E = \bigcup_{1 \leq n < \infty} E_n. \tag{2}$$

Now suppose that E is of category II on $\varkappa$. There must then be a number N such that E_N is of category II on $\varkappa$. We now lay down on the unit w-sphere a finite triangular lattice the meshes of which, denoted by $T_1, T_2, \ldots, T_m$, say, are all of (spherical) diameter less than $\varepsilon_N/4$. For a given $\mu \leq m$ we denote by $E_{N,\mu}$ the sub-set of E_N in which $T_\mu \cap C(f, e^{i\vartheta}) \cap \mathcal{C}\big(C_{\mathcal{G}_\vartheta}(f, e^{i\vartheta})_{+\varepsilon_N}\big)$ is not empty. Any of the sets $E_{N,\mu}$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$ may be empty and any two of them may overlap; but since

$$E_N = \bigcup_{\mu \leq m} E_{N,\mu}$$

we can find $\mu = M$, say, such that $E_{N,M}$ is of category II on $\varkappa$.

We now sub-divide this set $E_{N,M}$ as follows. First choose a point $a \in T_M$. Since T_M is of diameter less than $\varepsilon_N/4$ and also, for $e^{i\vartheta} \in E_{N,M}$, contains some point of $\mathcal{C}\big(C_{\mathcal{G}_\vartheta}(f, e^{i\vartheta})_{+\varepsilon_N}\big)$ it follows that for all $e^{i\vartheta} \in E_{N,M}$ the distance of a from $C_{\mathcal{G}_\vartheta}(f, e^{i\vartheta})$ is greater than $3\varepsilon_N/4$. Now let $\mathcal{E}_1$, be the sub-set of $E_{N,M}$ such that the spherical distance $[f(z), a]$ satisfies

$$[f(z), a] > \varepsilon_N/2 \tag{3}$$

for all $z \in \mathcal{G}_\vartheta$, $e^{i\vartheta} \in \mathcal{E}_1$, $1/2 < |z| < 1$; $\mathcal{E}_2$ the sub-set of $E_{N,M}$ such that (3) is satisfied for all $z \in \mathcal{G}_\vartheta$, $e^{i\vartheta} \in \mathcal{E}_2$, $3/4 < |z| < 1$, and, generally, $\mathcal{E}_p$, $p < \infty$, the sub-set of $E_{N,M}$ such that (3) is satisfied for all $z \in \mathcal{G}_\vartheta$, $e^{i\vartheta} \in \mathcal{E}_p$, $1 - 2^{-p} < |z| < 1$. Evidently any finite number of the sets $\mathcal{E}_p$ may be empty, $\mathcal{E}_1 \subseteqq \mathcal{E}_2 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathcal{E}_p \subseteqq \cdots$, and

$$E_{N,M} = \bigcup_{1 \leq p < \infty} \mathcal{E}_p. \tag{4}$$

[10]) $\mathcal{C}$ denotes the complement of a set with respect to the containing space, in this case the surface of the sphere.

Since $E_{N,M}$ is of category II there is a number P such that $\mathscr{E}_P$ is of category II on $\varkappa$; and there is also an arc β of $\varkappa$ on which $\mathscr{E}_P$ is dense. As $e^{i\vartheta}$ traverses β the set $\mathscr{G}_\vartheta$ sweeps out a set $\mathscr{B}$ of circular arcs. Let β' be an open arc contained in β and let 2η be its angular distance from the two end-points of β. We can find $\delta>0$ such that in the annulus $1-\delta<|z|<1$ all points $z\in\mathscr{G}_\vartheta$ lie in the angle $|\arg z-\vartheta|<\eta$. Consequently the end-points of the arcs of the set $\mathscr{B}$ contained in this annulus $1-\delta<|z|<1$ all lie outside the sector bounded by β' and the radii to its end points; and these arcs of $\mathscr{B}$ therefore traverse the annular sector of width δ bounded by β'. Now choose $\delta'<\min[\delta, 2^{-P}]$ and denote by Σ the annular sector bounded by β' and contained in $1-\delta'<|z|<1$. The set of points $\mathscr{B}\cap\Sigma$ is dense in Σ and for all $z\in\mathscr{B}\cap\Sigma$ the inequality (3) is satisfied. Hence, by continuity,

$$[f(z), a]\geq\varepsilon_N/2$$

for all $z\in\Sigma$. From this it follows, since $a\in T_M$ and T_M is of diameter $<\varepsilon_N/4$, that $T_M\in\mathscr{C}\,C(f, e^{i\vartheta'})$ for all $e^{i\vartheta'}\in\beta'$. But since $\mathscr{E}_P$ is dense on β and therefore also on β' we can find $e^{i\vartheta'}\in\beta'\cap\mathscr{E}_P$ so that, for this value of ϑ',

$$T_M\cap C(f, e^{i\vartheta'})\cap\mathscr{C}\left(C_{\mathscr{G}_{\vartheta'}}(f, e^{i\vartheta'})_{+\varepsilon_N}\right)$$

is not empty and therefore $T_M\cap C(f, e^{i\vartheta'})$ is not empty. This contradiction proves the theorem.

By a boundary path we mean a continuous curve which converges either to a point or an arc of $\varkappa$ which is its end. The end may be the whole circumference. By boundary paths of fixed form to a set of ends we mean a set of curves derived by rotation from a given continuous curve. Given any boundary path λ_0 converging to $z=1$ and the family $\{\lambda_\vartheta\}$ of rotational transforms of λ_0 each converging to $e^{i\vartheta}$ we have, as an immediate consequence of Theorem 1, the following result which contains Theorem A.

Theorem 2. *If $f(z)$ is meromorphic in $|z|<1$ and if $\{\lambda_\vartheta\}$ is any family of boundary paths of fixed form to the corresponding end points $e^{i\vartheta}$, then λ_ϑ is a path of maximum indetermination of $f(z)$ at $e^{i\vartheta}$ in a residual set of points $e^{i\vartheta}$ of the circumference $\varkappa$.*

For λ_ϑ satisfies the conditions on $\mathscr{G}_\vartheta$.

We may remark that if $\mathscr{G}_\vartheta$ lies on a monotonic boundary path λ_ϑ then it follows from continuity that $C_{\mathscr{G}_\vartheta}(f, e^{i\vartheta})=C_{\lambda\vartheta}(f, e^{i\vartheta})$, but this equation does not follow directly from continuity if $\mathscr{G}_\vartheta\subseteqq\lambda_\vartheta$ which is not monotonic. Then, however, $C_{\mathscr{G}_\vartheta}(f, e^{i\vartheta})\subseteqq C_{\lambda\vartheta}(f, e^{i\vartheta})$ if $\mathscr{G}_\vartheta\subseteqq\lambda_\vartheta$ and it follows from Theorem 1 that $C_{\mathscr{G}_\vartheta}(f, e^{i\vartheta})=C_{\lambda\vartheta}(f, e^{i\vartheta})=C(f, e^{i\vartheta})$ in a residual set of points $e^{i\vartheta}\in\varkappa$.

Corollary 1. *If $f(z)$ is meromorphic in $|z|<1$ and the sets $\mathscr{G}_\vartheta(1), \mathscr{G}_\vartheta(2), \ldots, \mathscr{G}_\vartheta(n), \ldots$ all satisfy the conditions of Theorem 1 on $\mathscr{G}_\vartheta$, then the set of points $e^{i\vartheta}$ at which every one of the sets $\mathscr{G}_\vartheta(1), \mathscr{G}_\vartheta(2), \ldots, \mathscr{G}_\vartheta(n), \ldots$ is a set of maximum indetermination of $f(z)$ is residual on $\varkappa$.*

For the set of points $e^{i\vartheta}$ in which any one of the sets $\mathscr{G}_\vartheta(n)$, $n=1, 2, \ldots$, is not of maximum indetermination is of category I on $\varkappa$.

5. Let $-\pi/2<\varphi_n<\pi/2$ and let $\mathscr{G}_\vartheta(n)$ be the chord to $e^{i\vartheta}$ making the angle φ_n with the radius vector at this point so that $C_{\mathscr{G}_\vartheta(n)}(f, e^{i\vartheta}) = C_{\varrho(\varphi_n)}(f, e^{i\vartheta})$. With the sets $\mathscr{G}_\vartheta(n)$ specified in this way Corollary 1 gives at once

Corollary 2. *If $f(z)$ is meromorphic in $|z|<1$ and we are given any enumerable set $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots, -\pi/2<\varphi_n<\pi/2$, then the set of points $e^{i\vartheta}$ for which*

$$C(f, e^{i\vartheta}) = C_{\varrho(\varphi_1)}(f, e^{i\vartheta}) = C_{\varrho(\varphi_2)}(f, e^{i\vartheta}) = \cdots = C_{\varrho(\varphi_n)}(f, e^{i\vartheta}) = \cdots$$

is residual on $\varkappa$.

We shall denote by $J(f)$ *the set of points $e^{i\vartheta}\in\varkappa$ such that for every Stolz angle Δ at $e^{i\vartheta}$ the equation $C_\Delta(f, e^{i\vartheta}) = C(f, e^{i\vartheta})$ is satisfied by $f(z)$*, i.e. every Δ is a set of maximum indetermination of $f(z)$ at every point $e^{i\vartheta}\in J(f)$.

Theorem 3. *If $f(z)$ is meromorphic in $|z|<1$, the set $J(f)$ is a residual set of the circumference $\varkappa$.*

For, $C_\Delta(f, e^{i\vartheta}) \subseteq C(f, e^{i\vartheta})$; and so if we take the set $\{\varphi_n\}$ of Corollary 2 to be a dense enumerable set, say the rationals, in the open interval $(-\pi/2, \pi/2)$, it follows from the Corollary that there is a residual set $\{e^{i\vartheta}\}$, $e^{i\vartheta}\in J(f)$, in which every Stolz angle Δ contains a chord $\varrho(\varphi)$, φ rational, such that

$$C_{\varrho(\varphi)}(f, e^{i\vartheta}) = C(f, e^{i\vartheta});$$

and since

$$C_{\varrho(\varphi)}(f, e^{i\vartheta}) \subseteq C_\Delta(f, e^{i\vartheta})$$

this proves the theorem.

We now introduce *the set $K(f)$ of points $e^{i\vartheta}\in\varkappa$ such that given any two Stolz angles Δ_1, Δ_2 at $e^{i\vartheta}$, whether overlapping or not, the equation $C_{\Delta_1}(f, e^{i\vartheta}) = C_{\Delta_2}(f, e^{i\vartheta})$ is satisfied.* Evidently $J(f)\subseteq K(f)$ and hence, as an immediate consequence of Theorem 3 we have

Theorem 4. *If $f(z)$ is meromorphic in $|z|<1$ the set $K(f)$ is a residual set of the circumference $\varkappa$.*

6. Certain properties of the sets $J(f)$ and $K(f)$

In the notation and terminology of COLLINGWOOD (1) we define the *outer angular cluster set* $C_{\mathscr{A}}(f, e^{i\vartheta})$ of $f(z)$ at $e^{i\vartheta}$ as the union

$$C_{\mathscr{A}}(f, e^{i\vartheta}) = \bigcup_{\Delta} C_\Delta(f, e^{i\vartheta})$$

taken over all Stolz angles Δ at $e^{i\vartheta}$. In general $C_{\mathscr{A}}(f, e^{i\vartheta})$ is a non-empty F_σ since every $C_\Delta(f, e^{i\vartheta})$ is a non-empty closed set; but for $e^{i\vartheta}\in K(f)$ the set $C_{\mathscr{A}}(f, e^{i\vartheta})$ is itself closed. The set $F(f)$ *of Fatou points of $f(z)$* is the set of points $e^{i\vartheta}$ for which $C_{\mathscr{A}}(f, e^{i\vartheta})$ is degenerate, i.e. consists of a single point. This definition, although it is superficially more general is in fact equivalent to that previously adopted[11]). For if $C_{\mathscr{A}}(f, e^{i\vartheta})$ consists of the point $a(\vartheta)$

[11]) Note that the statement in the final sentence of footnote 3 of COLLINGWOOD (1) is incorrect if $f(z)$ is restricted to be meromorphic.

which we may call *the Fatou value of* $f(z)$ *at* $e^{i\vartheta}$, then given any Stolz angle Δ at $e^{i\vartheta}$ and any number $b \neq a(\vartheta)$ we have $b \in \mathscr{C}_\Delta(f, e^{i\vartheta})$. It follows that given any $\varepsilon < |b - a(\vartheta)|$ we can find δ such that for all z in the angular domain defined by $z \in \Delta$ and $|z - e^{i\vartheta}| < \delta$ the inequality $|f(z) - b| > \varepsilon$ holds; or if, as we may assume without loss of generality, $b = \infty$, then $|f(z)| < 1/\varepsilon$ in the angular domain. It now follows from LINDELÖF's theorem, since $f(z) \to a(\vartheta)$ as $z \to e^{i\vartheta}$ along a chord in Δ, that $f(z)$ tends uniformly to $a(\vartheta)$ in Δ. Since Δ is an arbitrary Stolz angle at $e^{i\vartheta}$ this establishes the Fatou property of uniform convergence in any Stolz angle Δ at $e^{i\vartheta}$.

Now for $e^{i\vartheta} \in K(f)$ the equation

$$C_\Delta(f, e^{i\vartheta}) = C_{\mathscr{A}}(f, e^{i\vartheta})$$

is satisfied for every Stolz angle Δ; and since this equation is also satisfied for $e^{i\vartheta} \in F(f)$ we see that $F(f) \subseteqq K(f)$.

The set $I(f)$ *of Plessner points of* $f(z)$ is the set of points $e^{i\vartheta}$ such that $C_\Delta(f, e^{i\vartheta})$ is total[11a]) for every Stolz angle Δ at $e^{i\vartheta}$. It follows that also $I(f) \subseteqq K(f)$, so that

$$F(f) \cup I(f) \subseteqq K(f).$$

We thus see that the antithetic character of the sets $F(f)$ and $I(f)$ is in a sense only apparent and arises from the degeneracy of $C_\Delta(f, e^{i\vartheta})$ in the set $F(f)$.

By PLESSNER's Theorem[12]), $F(f) \cup I(f)$ is p.p. and therefore we have

Theorem 4a. *For any function* $f(z)$ *meromorphic in* $|z| < 1$ *the set* $K(f)$ *is both residual and* p.p. *on the circumference* $\varkappa$.

We should note that it is not true in general that $F(f) \cup I(f)$ is residual. A bounded function for which $C(f, e^{i\vartheta})$ is not degenerate for any $e^{i\vartheta}$, as is the case when $f(z)$ is a Blaschke product, is a counter example[13]). For then $I(f)$ is empty, and $F(f) \subseteqq \mathscr{C} J(f)$, which is of category I by Theorem 3. Thus the set $K(f) \cap \mathscr{C} F(f) \cap \mathscr{C} I(f)$ may be residual but is always of measure zero. As in previous papers we denote by $W(f)$ the set of points $e^{i\vartheta}$ for which $C(f, e^{i\vartheta})$ is total[14]). Plainly, $W(f) \cap \mathscr{C} I(f) \subseteqq \mathscr{C} J(f)$, which is of category I. Since $I(f) \subseteqq W(f)$ it follows that $I(f)$ *differs from* $W(f)$ *at most by a set of category I*, which is a known result[15]). Other known results are immediate consequences of Theorems 1, 2 and 3. Here I depart from the notation previously used and write $W_\varrho(f)$ for the set of points $e^{i\vartheta}$ for which the radial cluster set $C_\varrho(f, e^{i\vartheta})$ is total, $W_{\varrho(\varphi)}(f)$ for the set $\{e^{i\vartheta}\}$ for which the chordal cluster set $C_{\varrho(\varphi)}(f, e^{i\vartheta})$ is total and $W_{\lambda\vartheta}(f)$ the set $\{e^{i\vartheta}\}$ for which $C_{\lambda\vartheta}(f, e^{i\vartheta})$ is total, $\{\lambda_\vartheta\}$ being a family of curves of fixed form to the end points $e^{i\vartheta}$. More generally, $W_{\mathscr{G}_\vartheta}(f)$ denotes the set $\{e^{i\vartheta}\}$ for which $C_{\mathscr{G}_\vartheta}(f, e^{i\vartheta})$ is total.

[11a]) A set is total if its complement with respect to the sphere is empty.

[12]) PLESSNER (1) or COLLINGWOOD (1).

[13]) See footnote 6.

[14]) COLLINGWOOD and CARTWRIGHT (1) and COLLINGWOOD (1).

[15]) COLLINGWOOD (4).

Thus the symbol W denotes the (WEIERSTRASS) property of totality of the cluster set indicated. Similarly, we denote by $D(f)$ the set $\{e^{i\vartheta}\}$ of points, sometimes called convergence points, such that $C(f, e^{i\vartheta})$ is degenerate; by $D_\varrho(f)$ the set such that $C_\varrho(f, e^{i\vartheta})$ is degenerate; by $D_{\varrho(\varphi)}(f)$, $D_{\lambda_\vartheta}(f)$ and $D_{\mathscr{G}_\vartheta}(f)$ the sets for which $C_{\varrho(\varphi)}(f, e^{i\vartheta})$, $C_{\lambda_\vartheta}(f, e^{i\vartheta})$ and $C_{\mathscr{G}_\vartheta}(f, e^{i\vartheta})$ respectively are degenerate. For a bounded function, or a linear transform of a bounded function, we note that $D_\varrho(f) = D_{\varrho(\varphi)}(f) = D_{\lambda_\vartheta}(f) = F(f)$, but not in the general case. The symbol D denotes the property of degeneracy of the cluster set, or convergence of the function, on the set indicated[16]). With these notations we have

Theorem 5. *If $f(z)$ is meromorphic in $|z|<1$, then any two of the sets $W(f)$, $W_{\mathscr{G}_\vartheta}(f)$ and $I(f)$ where $\mathscr{G}_\vartheta$ satisfies the conditions of Theorem 1, differ at most by a set of category I on the circumference $\varkappa$.*

For, by Theorem 1, $W(f) \cap \mathscr{C}\, W_{\mathscr{G}_\vartheta}(f)$ is of category I and since $W(f) \geqq W_{\mathscr{G}_\vartheta}(f)$ it follows that $W(f)$ differs from $W_{\mathscr{G}_\vartheta}(f)$ by a set of category I. We have seen that $W(f)$ differs from $I(f)$ by a set of category I, so that the theorem is proved. If we particularise $\mathscr{G}_\vartheta$ by making it the radius ϱ or a chord $\varrho(\varphi)$ to $e^{i\vartheta}$ we obtain a previous theorem of the writer[17]).

Similarly, we have a theorem for the distribution of degenerate cluster sets which, on particularising $\mathscr{G}_\vartheta$ in the appropriate way, contains previous results of EGGLESTON and the writer[18]).

Theorem 6. *If $f(z)$ is meromorphic in $|z|<1$, then any two of the sets $D(f)$, $D_{\mathscr{G}_\vartheta}(f)$ and $F(f)$, where the set $\mathscr{G}$ satisfies the conditions of Theorem 1, differ at most by a set of category I on the circumference $\varkappa$.*

For, by Theorem 1, $D_{\mathscr{G}_\vartheta}(f) \cap \mathscr{C}\, D(f)$ is of category I and since $D(f) \subseteq D_{\mathscr{G}_\vartheta}(f)$ it follows that $D(f)$ differs from $D_{\mathscr{G}_\vartheta}(f)$ only by a set of category I. In particular, $D(f)$ differs from $D_\varrho(f)$ only by a set of category I and since, trivially, $D(f) \subseteq F(f) \subseteq D_\varrho(f)$, the theorem is proved.

7. The boundary cluster sets

The set $\mathscr{G}_\vartheta$ of Theorem 1 is an internal set of $|z|<1$ converging to $e^{i\vartheta}$ but may be arbitrarily close to the circumference $\varkappa$. In particular, we could take for the sequence $\mathscr{G}_\vartheta(1), \mathscr{G}_\vartheta(2), \ldots, \mathscr{G}_\vartheta(n), \ldots$ of Corollary 1 a sequence of curves $\lambda_\vartheta(1), \lambda_\vartheta(2), \ldots, \lambda_\vartheta(n), \ldots$ to $e^{i\vartheta}$ in $|z|<1$ and of increasing order of contact with the circumference at $e^{i\vartheta}$. However, by a slight elaboration of the proof of Theorem 1 we can prove the result which this suggests, namely that *in a residual set of points $e^{i\vartheta}$ the boundary cluster sets are maximal.* We shall in fact prove a more general theorem analogous to Theorem 1.

Denote by $(\vartheta-\eta, \vartheta)$ and $(\vartheta, \vartheta+\eta)$ the open intervals $\vartheta-\eta<\vartheta'<\vartheta$ and $\vartheta<\vartheta'<\vartheta+\eta$ respectively and let the set $H(\vartheta)$ be dense in one or both of

[16]) In previous papers, EGGLESTON (1) and COLLINGWOOD (5), the set we here call $D(f)$ was denoted by $G(f)$ and the set we here call $D_\varrho(f)$ by $D(f)$.

[17]) COLLINGWOOD (4).

[18]) EGGLESTON (1) and COLLINGWOOD (5).

them. For the moment we assume $H(\vartheta)$ to be dense in both and we denote by $H(\vartheta, -\eta)$ and $H(\vartheta, -\eta)$ the intersections $H(\vartheta) \cap (\vartheta - \eta, \vartheta)$ and $H(\vartheta) \cap (\vartheta, \vartheta + \eta)$. We now write, generalising the familiar definitions of the right and left-hand boundary cluster sets and the complete boundary cluster set of $f(z)$ at $e^{i\vartheta}$,

$$C\big(f, H(\vartheta, -\eta)\big) = \bigcup_{\vartheta' \in H(\vartheta, -\eta)} C(f, e^{i\vartheta'})$$

and

$$C_{Hr}(f, e^{i\vartheta}) = \bigcap_{\eta} \overline{C}\,\big(f, H(\vartheta, -\eta)\big); \qquad C\big(f, H(\vartheta, +\eta)\big) = \bigcup_{\vartheta' \in H(\vartheta, +\eta)} C(f, e^{i\vartheta'}) \tag{5}$$

and

$$C_{Hl}(f, e^{i\vartheta}) = \bigcap_{\eta} \overline{C}\,\big(f, H(\vartheta, +\eta)\big); \tag{6}$$

and

$$C_H(f, e^{i\vartheta}) = C_{Hr}(f, e^{i\vartheta}) \cup C_{Hl}(f, e^{i\vartheta}). \tag{7}$$

If $H(\vartheta)$ contains an interval $(\vartheta - \eta, \vartheta + \eta)$ then $C_{Hr}(f, e^{i\vartheta})$ and $C_{Hl}(f, e^{i\vartheta})$ become the right and left hand boundary cluster sets $C_{Br}(f, e^{i\vartheta})$ and $C_{Bl}(f, e^{i\vartheta})$ defined by[19]) the equations

$$C_{Br}(f, e^{i\vartheta}) = \bigcap_{\eta} \overline{C}\,\big(f, (\vartheta - \eta, \vartheta)\big)$$

and

$$C_{Bl}(f, e^{i\vartheta}) = \bigcap_{\eta} \overline{C}\,\big(f, (\vartheta, \vartheta + \eta)\big),$$

while

$$C_B(f, e^{i\vartheta}) = C_{Br}(f, e^{i\vartheta}) \cup C_{Bl}(f, e^{i\vartheta}).$$

We now define $H(\vartheta)$ as the translation through the interval $\vartheta - \vartheta_0$ of a set $H(\vartheta_0)$, say. Identifying 0 with 2π this gives us a family of sets on the circumference $\varkappa$ which are rotational transforms of one another like the family $\{\mathcal{G}_\vartheta\}$ of Theorem 1. We proceed to prove

Theorem 7. *If $f(z)$ is meromorphic in $|z| < 1$ and if the family of sets $\{H(\vartheta)\}$ are translations of one another, $H(0)$ being dense in an interval $(-\eta, 0)$, then the equation*

$$C_{Hr}(f, e^{i\vartheta}) = C(f, e^{i\vartheta}) \tag{8}$$

is satisfied for a set of values of ϑ residual in $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$. Similarly, if $H(\vartheta)$ is dense in $(\vartheta, \vartheta + \eta)$,

$$C_{Hl}(f, e^{i\vartheta}) = C(f, e^{i\vartheta}) \tag{9}$$

in a residual set in $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$.

It is sufficient to prove (8). First, $C_{Hr}(f, e^{i\vartheta}) \leqq C_{Br}(f, e^{i\vartheta}) \leqq C(f, e^{i\vartheta})$. Suppose, then, that the set E of values of ϑ for which

$$C_{Hr}(f, e^{i\vartheta}) \neq C(f, e^{i\vartheta})$$

[19]) Notation of Collingwood and Cartwright (1), pp. 121—122.

is of category II. Our argument closely follows the proof of Theorem 1 so that a good deal of the detail may be omitted. Given $\varepsilon>0$, $C_{Hr}(f, e^{i\vartheta})_{+\varepsilon}$ is the closed ε-neighbourhood of $C_{Hr}(f, e^{i\vartheta})$ on the sphere. As before, let $\{\varepsilon_n\}$ be a decreasing sequence of positive numbers $\varepsilon_n \to 0$ as $n \to \infty$ and denote by E_n the subset of E for which

$$C(f, e^{i\vartheta}) \cap \mathscr{C}\left(C_{Hr}(f, e^{i\vartheta})_{+\varepsilon_n}\right)$$

is not empty. Then $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_n \subseteq \cdots$, and

$$E = \bigcup_{1 \leq n < \infty} E_n .$$

Hence there exists a number N such that E_N is of category II. We repeat the triangulation $T_1, T_2, \ldots, T_m, T_\mu$ being of (spherical) diameter less than $\varepsilon_N/4$ for all $\mu \leq m$, and we denote by $E_{N,\mu}$ the sub-set of E_N in which

$$T_\mu \cap C(f, e^{i\vartheta}) \cap \mathscr{C}\left(C_{Hr}(f, e^{i\vartheta})_{+\varepsilon_N}\right)$$

is not empty. Since

$$E_N = \bigcup_{\mu \leq m} E_{N,\mu}$$

we can find M such that $E_{N,M}$ is of category II. Now choose $a \in T_M$. The distance of a from $C_{Hr}(f, e^{i\vartheta})$ evidently exceeds $\frac{1}{2}\varepsilon_N/4$. It follows from (5) that, for $\vartheta \in E_{N,M}$, there is an $\eta = \eta(\vartheta)$ such that

$$a \in \mathscr{C}\left(\overline{C}(f, H(\vartheta, -\eta))_{+\varepsilon_N/2}\right).$$

Choose a sequence $\{\eta_l\}$, $\eta_1 > \eta_2 > \cdots > \eta_l > \cdots$, $\lim_{l \to \infty} \eta_l = 0$, and denote by $E_{N,M,l}$ the sub-set of $E_{N,M}$ for which

$$a \in \mathscr{C}\left(\overline{C}(f, H(\vartheta, -\eta_l))_{+\varepsilon_N/2}\right).$$

Plainly $E_{N,M,l_1} \subseteq E_{N,M,l_2}$ where $l_1 < l_2$, and

$$E_{N,M} = \bigcup_{l} E_{N,M,l} .$$

Since $E_{N,M}$ is of category II we can find L such that $E_{N,M,L}$ is of category II. Now for $\vartheta \in E_{N,M,L}$,

$$a \in \mathscr{C}\left(\overline{C}(f, H(\vartheta, -\eta_L))_{+\varepsilon_N/2}\right)$$

and it follows that there is a $\delta = \delta(\vartheta)$ such that the inequality

$$[f(r e^{i\vartheta'}), a] > \varepsilon_N/3 \tag{10}$$

is satisfied for all $\vartheta' \in H(\vartheta, -\eta_L)$, $\vartheta \in E_{N,M,L}$ and $1 - \delta(\vartheta) < r < 1$. We now choose a sequence $\{\delta_p\}$, $\delta_1 > \delta_2 > \cdots > \delta_p > \cdots$, $\lim_{p \to \infty} \delta_p = 0$, and denote by $\mathscr{E}_p$ the sub-set of $E_{N,M,L}$ such that the inequality (10) is satisfied for all $\vartheta' \in H(\vartheta, -\eta_L)$, $\vartheta \in \mathscr{E}_p$ and $1 - \delta_p < r < 1$. Plainly $\mathscr{E}_{p_1} \subseteq \mathscr{E}_{p_2}$ where $p_1 < p_2$ and

$$E_{N,M,L} = \bigcup_{p} \mathscr{E}_p .$$

It follows that there is a P such that the set $\mathscr{E}_P$ is of category II so that the corresponding points $e^{i\vartheta}$ are dense in an arc γ of the circumference $\varkappa$. Let γ be the open arc $(\vartheta_1, \vartheta_2)$. The inequality (10) is therefore satisfied on the set of radial segments $z = re^{i\vartheta}$,

$$1 - \delta_P < r < 1, \qquad \vartheta' \in \bigcup_{\vartheta \in \mathscr{E}_P \cap (\vartheta_1, \vartheta_2)} H(\vartheta, -\eta_L);$$

and these radial segments are dense in the annular sector $1 - \delta_P < |z| < 1$, $\vartheta_1 < \arg z < \vartheta_2 + \eta_L$ so that, by the continuity of $f(z)$, (10) is satisfied throughout this sector. It follows that $T_M \cap C(f, e^{i\vartheta'})$ *is empty for every* $\vartheta' \in (\vartheta_1, \vartheta_2)$ since every point of T_M is at a distance less than $\varepsilon_N/4$ from a. But since $\mathscr{E}_P$ is dense in $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ we may choose $\vartheta' \in \mathscr{E}_P \cap (\vartheta_1, \vartheta_2)$ so that, $\mathscr{E}_P$ being a sub-set of $E_{N,M}$, $T_M \cap C(f, e^{i\vartheta'}) \cap \mathscr{C}\left(C_{Hr}(f, e^{i\vartheta'})_{+\varepsilon_N}\right)$ is not empty and therefore the larger set $T_M \cap C(f, e^{i\vartheta'})$ is not empty. We have thus reached a contradiction which proves the theorem.

Corollary 3. *If* $f(z)$ *is meromorphic in* $|z| < 1$ *the boundary cluster sets* $C_{Br}(f, e^{i\vartheta})$, $C_{Bl}(f, e^{i\vartheta})$ *and* $C_B(f, e^{i\vartheta})$ *are all maximal in a residual set of points* $e^{i\vartheta}$ *of the circumference* $\varkappa$; *that is to say* $C_{Br}(f, e^{i\vartheta}) = C(f, e^{i\vartheta})$ *and similarly for* C_{Bl} *and* C_B.

8. A property of points of $K(f)$ and $J(f)$

For a given point $e^{i\vartheta} \in K(f)$ we now consider afresh the distribution in the open interval $(-\pi/2, \pi/2)$ of the values of φ for which $C_{\varrho(\varphi)}(f, e^{i\vartheta}) = C_{\mathscr{A}}(f, e^{i\vartheta})$. The same technique enables us to prove

Theorem 8. *If* $f(z)$ *is meromorphic in* $|z| < 1$ *and if* $e^{i\vartheta} \in K(f)$, *then* $C_{\varrho(\varphi)}(f, e^{i\vartheta}) = C_{\mathscr{A}}(f, e^{i\vartheta})$ *for a set of values of* φ *residual in the open interval* $(-\pi/2, \pi/2)$.

The assertion is of course trivial in the case $e^{i\vartheta} \in F(f)$; and in the case $e^{i\vartheta} \in I(f)$ the set $C_{\mathscr{A}}(f, e^{i\vartheta})$ is total so that the result reduces to a previous theorem [20]).

We shall show that the hypothesis that $C_{\varrho(\varphi)}(f, e^{i\vartheta}) \neq C_{\mathscr{A}}(f, e^{i\vartheta})$ for a set of values of φ of category II in $(-\pi/2, \pi/2)$ implies that $e^{i\vartheta} \in \mathscr{C}K(f)$, which will prove the theorem.

Since $C_{\varrho(\varphi)}(f, e^{i\vartheta})$ is contained in $C_{\mathscr{A}}(f, e^{i\vartheta})$ and is closed the hypothesis $C_{\varrho(\varphi)}(f, e^{i\vartheta}) \neq C_{\mathscr{A}}(f, e^{i\vartheta})$ for a given φ implies that there is a positive ε such that, denoting the closed ε-neighbourhood of $C_{\varrho(\varphi)}(f, e^{i\vartheta})$ by $C_{\varrho(\varphi)}(f, e^{i\vartheta})_{+\varepsilon}$, the set $C_{\mathscr{A}}(f, e^{i\vartheta}) \cap \mathscr{C}\left(C_{\varrho(\varphi)}(f, e^{i\vartheta})_{+\varepsilon}\right)$ is not empty. We again take a decreasing sequence $\{\varepsilon_n\}$ tending to zero and, for a given φ, we denote by $n(\varphi)$ the smallest value of n, if such a number exists, for which $C_{\mathscr{A}}(f, e^{i\vartheta}) \cap \mathscr{C}\left(C_{\varrho(\varphi)}(f, e^{i\vartheta})_{+\varepsilon_n}\right)$ is not empty. For a given $e^{i\vartheta}$ and a given n let B_n be the set of values of φ in $(-\pi/2, \pi/2)$ such that $n(\varphi) = n$. Plainly $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots \subseteq B_n \subseteq \cdots$; and if $B = B(\vartheta)$ denotes the set of φ in which $C_{\varrho(\varphi)}(f, e^{i\vartheta}) \neq C_{\mathscr{A}}(f, e^{i\vartheta})$, then

$$B = \bigcup_{1 \leq n < \infty} B_n.$$

[20]) Collingwood (1), p. 181, Theorem 10.

Since by hypothesis B is of category II we can find N such that B_N is of category II in $(-\pi/2, \pi/2)$. We again use the triangular lattice having meshes $T_1, T_2, \ldots, T_m$ all of diameter less than $\varepsilon_N/4$; and for a given $\mu \leqq m$ we denote by $B_{N,\mu}$ the subset of B_N in which

$$T_\mu \cap C_{\mathscr{A}}(f, e^{i\vartheta}) \cap \mathscr{C}\left(C_{\varrho(\varphi)}(f, e^{i\vartheta})_{+\varepsilon_N}\right)$$

is not empty. Since

$$B_N = \bigcup_{\mu \leqq m} B_{N,\mu}$$

we can find M such that $B_{N,M}$ is of category II in $(-\pi/2, \pi/2)$. Choosing $a \in T_M$ we sub-divide $B_{N,M}$ in a way analogous to that employed before. Let $\mathscr{B}_1$ be the sub-set of $B_{N,M}$ such that the inequality

$$[f(e^{i\vartheta}(1 - te^{i\varphi})), a] > \varepsilon_N/2 \tag{11}$$

is satisfied for all $\varphi \in \mathscr{B}_1$ and $0 < t < \frac{1}{2}$; and, generally, let $\mathscr{B}_p$ be the sub-set of $B_{N,M}$ such that (11) is satisfied for all $\varphi \in \mathscr{B}_p$ and $0 < t < 2^{-p}$. Then

$$B_{N,M} = \bigcup_{1 \leqq p < \infty} \mathscr{B}_p$$

and we can find P such that $\mathscr{B}_P$ is of category II in $(-\pi/2, \pi/2)$ and therefore dense in a sub-interval Δ. The angular domain defined by Δ and lying within the circle $|z - e^{i\vartheta}| < 2^{-P}$ thus contains a dense set of chordal segments on which (11) is satisfied so that it follows from continuity that (11) is satisfied throughout this domain. Hence $C_\Delta(f, e^{i\vartheta}) \cap T_M$ is empty. But, since $\mathscr{B}_P$ is dense in Δ we may choose $\varphi' \in \mathscr{B}_P \cap \Delta$ so that

$$T_M \cap C_{\mathscr{A}}(f, e^{i\vartheta}) \cap \mathscr{C}\left(C_{\varrho(\varphi')}(f, e^{i\vartheta})_{+\varepsilon_N}\right)$$

is not empty and hence also the larger set $T_M \cap C_{\mathscr{A}}(f, e^{i\vartheta})$ is not empty. Therefore $C_\Delta(f, e^{i\vartheta}) \neq C_{\mathscr{A}}(f, e^{i\vartheta})$, so that $e^{i\vartheta} \in \mathscr{C}K(f)$ and the theorem is proved.

Corollary 4. *If $f(z)$ is meromorphic in $|z| < 1$ and $e^{i\vartheta} \in J(f)$, then $C_{\varrho(\varphi)}(f, e^{i\vartheta}) = C(f, e^{i\vartheta})$ for a set of values of φ residual in $(-\pi/2, \pi/2)$.*

For in $J(f)$ we have $C_{\mathscr{A}}(f, e^{i\vartheta}) = C(f, e^{i\vartheta})$ and $J(f) \leqq K(f)$.

9. Maximising sub-sets of $J(f)$

We can choose for the sets $\mathscr{G}_\vartheta(1), \mathscr{G}_\vartheta(2), \ldots, \mathscr{G}_\vartheta(n), \ldots$, of Corollary 1 an enumerable family of curves $\{\lambda_\vartheta(n)\}$ all having $e^{i\vartheta}$ as end-point and dense in the circle $|z| < 1$. For example, we may take the family of circular arcs which pass through the points $e^{i\vartheta}$ and $-e^{i\vartheta}$. A repetition of the argument of the previous paragraph shows that at every point of $J(f)$ the cluster set on every one of a residual set of these circular arcs is maximal, i.e. equal to $C(f, e^{i\vartheta})$. By Corollary 3, the sub-set $J_1(f)$ of $J(f)$ in which $C_{Br}(f, e^{i\vartheta})$ and $C_{Bl}(f, e^{i\vartheta})$ are also maximal is again residual in $\varkappa$. If we take $\{\lambda_\vartheta(n)\}$ to be the family of oricycles through $e^{i\vartheta}$ the cluster sets upon a residual set of these to the right and left of $e^{i\vartheta}$ are again maximal in a residual set on $\varkappa$ and

therefore in a residual sub-set of $J_1(f)$; and so on for families of curves in $|z|<1$ having higher orders of contact with the circumference at $e^{i\vartheta}$. The question naturally arises as to the conditions under which the cluster set on *every curve* to $e^{i\vartheta}$ is maximal for a significant set of points $e^{i\vartheta}\in\varkappa$. Simple examples are known for which this is not the case for any point $e^{i\vartheta}\in\varkappa$. KOENIG's function $\mathscr{K}(z)$ for example, and a function constructed by BAGEMIHL, ERDÖS and SEIDEL are both functions regular in $|z|<1$ for which every point of $\varkappa$ is a limit of zeros of the function and at the same time the end-point of an asymptotic path on which the function tends to infinity. The cluster set of the function is therefore of infinite diameter at every point $e^{i\vartheta}$ while the cluster set on some curve to this point is degenerate. There are, however, important classes of functions for which the cluster set on every curve to $e^{i\vartheta}$ is maximal in a residual set of points $e^{i\vartheta}\in\varkappa$. Apart from these classes the theorems we have proved above are substantially best possible.

We denote by $\Pi(f, e^{i\vartheta})$ the intersection of the cluster sets $C_\lambda(f, e^{i\vartheta})$ taken over all possible curves λ in $|z|<1$ ending at $e^{i\vartheta}$. Then $\Pi(f, e^{i\vartheta})\subseteq C(f, e^{i\vartheta})$; and $\Pi(f, e^{i\vartheta})$ may be empty as is the case, for example, if $f(z)$ has two distinct asymptotic values at $e^{i\vartheta}$. We call Π *the principal sub-set of* C and a value $a\in\Pi(f, e^{i\vartheta})$ *a principal value* at $e^{i\vartheta}$.

It was proved by GROSS[21]) that for any function $f(z)$ and any point $e^{i\vartheta}$ a neighbourhood of which is mapped by $f(z)$ on a finite area we have

$$C_{\mathscr{A}}(f, e^{i\vartheta}) = \Pi(f, e^{i\vartheta}) \tag{12}$$

so that $\Pi(f, e^{i\vartheta})$ is certainly not empty at such a point. It follows that for a function $f(z)$ whose Dirichlet integral on $|z|<1$ is finite the equation (12) is satisfied for all $e^{i\vartheta}$ and the set Π exists at every point of $\varkappa$. Since $C_{\mathscr{A}}(f, e^{i\vartheta}) = C(f, e^{i\vartheta})$ for $e^{i\vartheta}\in J(f)$ we thus have proved

Theorem 9. *If $f(z)$ is meromorphic in $|z|<1$ and if its Dirichlet integral is finite then at every point of the residual set $J(f)$ the cluster set $C(f, e^{i\vartheta})$ and its principal sub-set are identical.*

Another sufficient condition established by GROSS for the equation (12) is that $C(f, e^{i\vartheta})$ shall be non-dense so that $C(f, e^{i\vartheta}) = \mathscr{F}C(f, e^{i\vartheta})$, where $\mathscr{F}$ denotes the frontier of C. In particular, we have

Theorem 9a. *If $f(z)$ is meromorphic in $|z|<1$ and such that $C(f) = \mathscr{F}C(f)$, then*

$$C(f, e^{i\vartheta}) = \Pi(f, e^{i\vartheta})$$

for all $e^{i\vartheta}\in J(f)$.

In the special case of univalent functions this theorem gives, as a corollary, the complete solution of an old problem of CARATHEODORY on the prime end structure of the boundary of a simply connected domain. This problem is treated elsewhere[22]) and will not therefore be further discussed here.

[21]) GROSS (1), § 8, p. 258. The restriction to regular functions in GROSS' statement of the theorem is superfluous. For $\mathscr{C}R(f, e^{i\vartheta})$ plainly cannot be empty so that a linear transformation to a function regular in a neighbourhood of $e^{i\vartheta}$ can always be found.

[22]) See footnote 7.

Part 2

10. Cluster sets on spiral paths

We confine ourselves for convenience to the case of spiral paths in $|z|<1$ converging to the circumference $\varkappa$; but our methods and results are equally valid for more general classes of paths converging to the circumference.

Given any function $f(z)$ meromorphic in $|z|<1$ it is easy to prove that there is an isolated set G of points

$$\{z_n\},\ |z_n|<|z_{n+1}|,\ \lim_{n\to\infty}|z_n|=1,$$

such that $C_{\mathscr{G}}(f)=C(f)$, from which it follows that, given any spiral σ passing through all the points z_n and converging to $\varkappa$, $C_\sigma(f)=C(f)$[23]). This establishes the existence of spirals of maximum indetermination. It can be proved, however, that for certain classes of functions *every* spiral is a path of maximum indetermination.

We recall the following definitions[24]). $R(f)$ is the set of values each taken an infinity of times by $f(z)$ in $|z|<1$, $\mathscr{C}R(f)$ is its complement and $\overline{\mathscr{C}R}(f)$ the closure of this set. Similarly, $R(f, e^{i\vartheta})$ is the set of values each of which is taken in every neighbourhood of the point $e^{i\vartheta}$ contained in $|z|<1$, $\Gamma(f)$ is the set of asymptotic values of $f(z)$, and $\Gamma(f)=\Gamma_P(f)\cup\Gamma_A(f)$, where $\Gamma_P(f)$ is the set of values approached on paths having an end point on $\varkappa$ and $\Gamma_A(f)$ the set approached on paths which converge to arcs of the circumference $\varkappa$, of which the spirals are a special case. $\Gamma_P(f, e^{i\vartheta})$ is the set of asymptotic values approached along paths ending in $e^{i\vartheta}$.

We prove the following theorem.

Theorem 10. *If $f(z)$ is meromorphic in $|z|<1$ and such that $\mathscr{C}R(f)$ contains three points, then, for any spiral path σ in $|z|<1$ converging to $\varkappa$,*

$$C_\sigma(f)\supseteq C(f)\cap\overline{\mathscr{C}R}(f). \tag{13}$$

Since $\mathscr{C}R(f)$ contains three points $\Gamma_A(f)$ is empty so that $\Gamma(f)=\Gamma_P(f)$ by a theorem of COLLINGWOOD and CARTWRIGHT[25]). Because σ is a spiral converging to $\varkappa$ and $C_\sigma(f)$ is closed we have $\overline{\Gamma}_P(f)\subseteq C_\sigma(f)$, where $\overline{\Gamma}_P$ denotes the closure of Γ_P. But, by another theorem of COLLINGWOOD and CARTWRIGHT[26]), $\overline{\mathscr{C}R}(f)\cap C(f)\subseteq\overline{\Gamma}(f)$, which proves the theorem.

Corollary 5. *If $f(z)$ is meromorphic in $|z|<1$ and if its Dirichlet integral is finite, then on any spiral σ converging to $\varkappa$,*

$$C_\sigma(f)=C(f). \tag{14}$$

For $\mathscr{C}R(f)$ must be dense. Otherwise there is a domain δ on the unit w-sphere contained in $R(f)$ and therefore covered an infinity of times by

[23]) COLLINGWOOD (3). I take the opportunity to point out that Theorem 1 of this note had been anticipated by GROSS (1), p. 250, footnote 13.

[24]) COLLINGWOOD and CARTWRIGHT (1).

[25]) loc. cit., p. 97, Theorem 6.

[26]) loc. cit., p. 112, Theorem 9.

the Riemann surface generated by $f(z)$, the area of which is therefore infinite. Hence $\overline{\mathscr{C}R}(f)$ is total and since $C_\sigma(f) \subseteqq C(f)$ the result follows.

Corollary 6. *If $f(z)$ is such that $C(f) = \mathscr{F}C(f)$, then*

$$C_\sigma(f) = C(f)$$

for any spiral σ in $|z|<1$ converging to $\varkappa$.

For $\mathscr{C}R(f)$ is dense.

In particular, (14) holds for every function $f(z)$ of finite valency.

Corollary 7. *If $f(z)$ is such that $C(f)$ is sub-total, then for any spiral σ in $|z|<1$ converging to $\varkappa$,*

(15) $$C_\sigma(f) \supseteqq \mathscr{F}C(f).$$

For $\mathscr{F}C(f) \subset \overline{\mathscr{C}R}(f)$ and $\mathscr{F}C(f)$ is not empty since $\mathscr{C}C(f)$ is not empty.

This corollary is best possible as is shown by the example of the Blaschke product

$$\Phi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{z - t_n}{1 - t_n z}$$

where

$$t_n = \frac{n! - 1}{n! + 1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

It was shown by SEIDEL[26a]) that if we consider the sequence of points

$$\tau_n = \frac{(n-1)! - \varrho}{(n-1)! + \varrho}, \qquad 1 < \varrho < 2, \; n = 1, 2, \ldots,$$

lying between successive zeros t_n of the function $\Phi(z)$ then

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(\tau_n) = \frac{1-\varrho}{1+\varrho}.$$

A precisely similar argument shows that for the sequence of points

$$\tau_n' = \frac{(n-1)! - \sqrt{(n-1)}}{(n-1)! + \sqrt{(n-1)}},$$

which also separates successive zeros of $\Phi(z)$, then

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(\tau_n') = 1.$$

The point $z = 1$ is the only singularity of $\Phi(z)$ on $\varkappa$ so that $|\Phi(z)| = 1$ at every other point $z \in \varkappa$. It follows that for any $\alpha < 1$ the components of the open set in which $|\Phi(z)| < \alpha$ are infinite in number and are all contained, together with the level curves which are their boundaries, in the open disc $|z| < 1$ and are symmetrical with respect to the real axis. We can therefore trace

[26a]) SEIDEL (1), p. 14.

a spiral σ converging to $\varkappa$ whose only intersections with the positive real axis are points of the sequence $\{\tau_n'\}$ and on which $|\Phi(z)| \to 1$ as $|z| \to 1$. Since the components just referred to are infinite in number $C(\Phi)$ is the closed unit disc Ω so that it follows from Corollary 3 that on this spiral σ, $C_\sigma(\Phi) = \mathscr{F}\Omega$, which proves our assertion.

There is an alternative proof of Theorem 10 which is of some independent interest. The domain in $|z|<1$ bounded by σ may be mapped conformally onto the disc $|\zeta|<1$ so that the point $\zeta = 1$ corresponds to the circumference $\varkappa$. Denote the mapping function by $\zeta(z)$ and its inverse by $z(\zeta)$. The function $\psi(\zeta) = f(z(\zeta))$ is then meromorphic in $|\zeta|<1$ and satisfies the equations $C(\psi, 1) = C(f)$ and $C_B(\psi, 1) = C_\sigma(f)$.

Suppose that $\mathscr{C}C_\sigma(f)$ is not empty. By BEURLING's Theorem[26b]), $\mathscr{F}C(\psi, 1) \subseteqq \mathscr{F}C_B(\psi, 1)$ from which it follows, since $\mathscr{C}C_B(\psi, 1) = \mathscr{C}C_\sigma(f)$ is open, that $\mathscr{C}C_\sigma(f) \cap \mathscr{F}C(f)$ is empty. This proves Corollaries 6 and 7 directly.

To prove Theorem 10 we use not BEURLING's Theorem but the well known theorem of IVERSEN and GROSS[27]), by which

$$\mathscr{C}R(\psi, 1) \cap C(\psi, 1) \cap \mathscr{C}C_B(\psi, 1) \subseteqq \Gamma_P(\psi, 1). \tag{16}$$

Every path in $|\zeta|<1$ ending at the point $\zeta = 1$ corresponds under the mapping $\zeta(z)$ to a spiral in $|z|<1$ which does not intersect σ, that is to say to a curve in a sub-class of the class of spirals in $|z|<1$. Hence $\Gamma_P(\psi, 1) \subseteqq \Gamma_S(f)$, where $\Gamma_S(f)$ denotes the sub-set of asymptotic values of $f(z)$ which are approached along spirals. From (16) we have therefore

$$\mathscr{C}R(f) \cap C(f) \cap \mathscr{C}C_\sigma(f) \subseteqq \Gamma_S(f). \tag{17}$$

Now, by a theorem of COLLINGWOOD and CARTWRIGHT quoted above[28]) $\Gamma_S(f)$ is empty if $\mathscr{C}R(f)$ contains three values and so under this condition

$$\mathscr{C}R(f) \cap C(f) \subseteqq C_\sigma(f) \tag{18}$$

and hence, since $C(f)$ and $C_\sigma(f)$ are both closed,

$$\overline{\mathscr{C}R}(f) \cap C(f) \subseteqq C_\sigma(f),$$

which proves the theorem.

We should note that if $\mathscr{C}R(f)$ contains only two points both of them may belong to $\Gamma_S(f)$[29]) so that in this case we can find spirals σ_1 and σ_2 such that $C_{\sigma_1}(f) \cap C_{\sigma_2}(f)$ is empty.

A theorem similar to Theorem 10 may be proved by our first method for a path which converges to an arc of $\varkappa$.

[26b]) See COLLINGWOOD and CARTWRIGHT (1), p. 123.
[27]) See COLLINGWOOD and CARTWRIGHT (1), p. 124, Theorem C'.
[28]) loc. cit., p. 97, Theorem 6.
[29]) See VALIRON (1) for an example.

11. A method of construction

The mapping of the spiral domain described in the previous paragraph gives a method for the construction of a function whose cluster set at the point $\zeta = 1$ can be prescribed within the limitations imposed by Theorem 10. The most important of these lies in the fact that, given an arbitrary continuum C, it is not true in general that there is a meromorphic function $f(z)$ such that $C(f) = C$. A known counter-example of such a continuum due to POTYAGAILO and RUDIN is in fact non-dense[30]). However, the frontier of any simply connected domain, however complicated its structure, is an admissible continuum and may be transformed from $C(f)$ to $C(\psi, 1)$ by some standard mapping, since the spiral in this case is arbitrary.

As we have seen, given any function $f(z)$ meromorphic in $|z|<1$, there is some spiral σ such that $C_\sigma(f) = C(f)$; but since the form of σ depends upon $f(z)$ there can be no standard mapping for the actual construction of $\psi(\zeta)$ but a mere existence theorem in the general case.

12. Generalisations

A domain of finite connectivity $p>1$ may be mapped conformally upon a domain of the same connectivity belonging to any one of a variety of canonical types, parallel slit domains, radial slit domains, circle domains, etc.[31]). We choose the circle domain, that is to say a domain containing the point at infinity whose complement consists of disjoint circular discs, as the canonical type to consider. We shall consider domains having only non-degenerate boundary components since the properties of an analytic function at an isolated boundary point are fully known. The domains which may be conformally mapped upon such a canonical domain have no degenerate boundary component.

Let D be the circle domain and denote the circular boundary components by $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_p$, so that $\mathscr{F}D = \bigcup_{\nu \le p} \varkappa_\nu$. Suppose that $f(z)$ is meromorphic in D. The cluster sets of $f(z)$ on a component $\varkappa_\nu$, denoted by $C(f, \varkappa_\nu)$, and at a point $\zeta \in \varkappa_\nu$ denoted by $C(f, \zeta)$, are defined in the obvious way, e.g. $a \in C(f, \varkappa_\nu)$ if there is a sequence $\{z_n\}$, $z_n \in D$, $\lim_{n\to\infty} d(z_n, \varkappa_\nu) = 0$, such that $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = a$, where $d(z, \varkappa)$ is the distance from the point z to the set $\varkappa$. Now $\varkappa_\nu$ may be enclosed in a concentric circle χ_ν which does not meet $\mathscr{F}D$ or contain any other component of $\mathscr{F}D$, so that $f(z)$ is meromorphic in the annulus between $\varkappa_\nu$ and χ_ν. Cut this annulus along a radius and map the resulting simply connected domain on the circular disc $|\xi|<1$. $\varkappa_\nu$ is then mapped upon an arc γ_ν of the circle $|\xi| = 1$ and the mapping is conformal on the two arcs $\varkappa_\nu$ and γ_ν themselves. All the theorems of §§ 4–9 above, together with the

---

[30]) POTYAGAILO (1); RUDIN (1).

[31]) See for example JULIA (1).

theorems of FATOU and PLESSNER, are valid for the function $\psi(\xi) = f(z(\xi))$ in $|\xi| < 1$, where $z(\xi)$ is the inverse of the function $\xi(z)$ which maps the annulus on $|\xi| < 1$. Since the mapping is conformal on $\varkappa_\nu$ and γ_ν it follows that to the sets $J(\psi) \cap \gamma_\nu$ and $K(\psi) \cap \gamma_\nu$ there correspond sets on $\varkappa_\nu$ which we may call $J(f, \varkappa_\nu)$ and $K(f, \varkappa_\nu)$ such that, if Δ denotes an angular domain in D having its vertex at $\zeta \in \varkappa_\nu$, we have $C_\Delta(f, \zeta) = C(f, \zeta)$ for $\zeta \in J(f, \varkappa_\nu)$ and, given any two angular domains Δ_1 and Δ_2 having the common vertex ζ, we have $C_{\Delta_1}(f, \zeta) = C_{\Delta_2}(f, \zeta)$ for $\zeta \in K(f, \varkappa_\nu)$. At corresponding points $\zeta \in \varkappa_\nu$ and ξ the equation $C(f, \xi) = C(\psi, \xi)$ is satisfied and for $\zeta \in K(f, \varkappa_\nu)$ and its corresponding point $\xi(\zeta) \in K(\psi) \cap \gamma_\nu$ every angular cluster set $C_\Delta(f, \zeta)$ is equal to every angular cluster set $C_\Delta(\psi, \xi)$ in virtue of the definitions of $K(\psi)$ and $K(f, \varkappa_\nu)$. We denote by $F(f, \varkappa_\nu)$ the sub-set of $K(f, \varkappa_\nu)$ in which the angular cluster sets $C_\Delta(f, \zeta)$ are degenerate and by $I(f, \varkappa_\nu)$ the sub-set in which they are total. Since sets of zero measure and sets of category I on $\varkappa_\nu$ correspond respectively to sets of zero measure and sets of category I on γ_ν an application of PLESSNER's theorem and of Theorem 4 to $\psi(\xi)$ proves the following theorem.

Theorem 11. *If $f(z)$ is meromorphic in D and $\varkappa_\nu$ is one of its circular boundaries, then the set $K(f, \varkappa_\nu)$ is residual on $\varkappa_\nu$ and the sub-set $F(f, \varkappa_\nu) \cup I(f, \varkappa_\nu)$ of $K(f, \varkappa_\nu)$ is* p.p. *on $\varkappa_\nu$.*

An alternative method is to prove an analogue of Theorem 1 for a contour $\varkappa_\nu$ and sets $\mathscr{G}_\vartheta$ in D, where now ϑ is a rotation about the centre of $\varkappa_\nu$. The proof is the same as that of Theorem 1 apart from trivial verbal changes. We can then proceed again to handle every individual contour by mapping the cut annulus between $\varkappa_\nu$ and χ_ν on $|\xi| < 1$ and thus prove for each $\varkappa_\nu$ the analogues of all the theorems on pointwise cluster sets proved in Part 1 which are not implied by Theorem 11. Our method is not necessarily applicable to a domain D of infinite connectivity for then $\varkappa_\nu$ may not be an isolated boundary component. The properties of $f(z)$ near a non-isolated boundary component depend upon its relation to the neighbouring boundary components[32]).

Some of the results may be usefully extended to more general domains whose boundary components are not circular. Consider a domain $\mathscr{D}$ of finite connectivity whose complement contains p non-degenerate components whose frontiers are denoted by $k_1, k_2, \ldots, k_p$ and which may accordingly be mapped conformally upon a domain D having p corresponding circular boundary components $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_p$. There is a 1:1 correspondence under the mapping between points of $\varkappa_\nu$ and frontier elements (prime ends) of $\mathscr{D}$ in k_ν and it follows from our theorems that on any given k_ν there is a residual set of frontier elements which are the "ends" of a set of paths $\{\mu(\vartheta, k_\nu)\}$ corresponding under the mapping to a set $\{\lambda(\vartheta, \varkappa_\nu)\}$ of paths of fixed form,

[32]) This is illustrated by the conformal mapping of domains of infinite connectivity upon other plane domains, which has been studied by a number of authors. For recent results and references to previous work see STREBEL (1) and BROWN (1).

e.g. radial paths in D terminating on $\varkappa_\nu$ in a residual set, and on which the cluster set $C_{\mu(\vartheta, k_\nu)}(\psi, \omega)$ is maximal, i.e. $C_{\mu(\vartheta, k_\nu)}(\psi, \omega) = C(\psi, \omega)$, where $\omega \in k_\nu$ is a frontier element not necessarily a point. The set $\{\mu(\vartheta, k_\nu)\}$ intersects every closed curve obtained by the mapping of a circle χ_ν sufficiently close to $\varkappa_\nu$ in a residual set and, adapting a term of BAGEMIHL and SEIDEL[33]), may be called a residual tress. If we consider the mapping function $\zeta(z)$ which maps D on $\mathfrak{D}$ our method at once gives for each k_ν the same theorems on the distribution of the four classes of prime ends as we have proved for a simply connected domain.

13. Turning now to Part 2, we repeat the mapping of the cut annulus between $\varkappa_\nu$ and χ_ν onto the unit circle $|\xi| < 1$ and we observe that the theorem of GROSS and IVERSEN applies to the function $\psi(\xi) = f(z(\xi))$ on $|\xi| = 1$. The mapping puts a spiral σ_ν in D whose closure contains $\varkappa_\nu$ onto a sequence Σ of curves in $|\xi| < 1$ converging to the arc γ_ν defined above and separating γ_ν from the origin $\xi = 0$. Plainly the cluster set $C_\Sigma(\psi)$ of $\psi(\xi)$ on Σ is equal to $C_{\sigma_\nu}(f, \varkappa_\nu)$ and we can apply to $\psi(\xi)$ on Σ the proof of Theorem 10 with only verbal changes and thus prove

Theorem 12. *If $f(z)$ is meromorphic in a domain D of finite connectivity and if, for a non-degenerate circular boundary component $\varkappa_\nu$, $\mathfrak{C}R(f, \varkappa_\nu)$ contains three points, then for any spiral σ_ν in D converging to $\varkappa_\nu$, we have*

$$C_{\sigma_\nu}(f) \supseteq C(f, \varkappa_\nu) \cap \overline{\mathfrak{C}R}(f, \varkappa_\nu). \tag{19}$$

This leads, with the obvious verbal adjustments, to a group of corollaries exactly parallel to Corollaries 5, 6 and 7 given in § 10. In contrast with Theorem 12 and its corollaries we may recall a theorem of BAGEMIHL and SEIDEL[34]) asserting the existence of a function meromorphic in D and having a prescribed enumerable set of asymptotic values on a prescribed set of spirals in D converging to one of the boundary components $\varkappa_\nu$.

14. It will have been noted that the only property of analytic functions used in the proof of Theorem 1 is the property of being a continuous open mapping. On the other hand, FATOU's theorem and therefore also PLESSNER's theorem depend upon the Poisson integral representation of a harmonic function. The theorem of GROSS and IVERSEN also requires more than continuity. But all our theorems on maximal cluster sets which do not depend on the FATOU-PLESSNER or GROSS-IVERSEN theorems can be immediately extended to continuous functions. In particular, Theorems 3 and 4 asserting that $J(f)$ and $K(f)$ are residual sets on $\varkappa$ are valid for continuous functions while FATOU's and PLESSNER's theorems require further conditions. Theorem 4, for example, is in this sense more general than PLESSNER's theorem.

---

[33]) BAGEMIHL and SEIDEL (3).

[34]) BAGEMIHL and SEIDEL (2).

References

BAGEMIHL, F., and W. SEIDEL: (1) A general principle involving Baire category, with applications to function theory and other fields. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **39**, 1068—1075 (1953). — (2) Spiral and other asymptotic paths, and paths of complete indetermination, of analytic and meromorphic functions. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **39**, 1251—1258 (1953). — (3) Some boundary properties of analytic functions. Math. Z. **61**, 186—199 (1954). — BROWN, L. J. M.: (1) On conformal mappings of domains of infinite connectivity. Proc. Cambridge Phil. Soc. **51**, 56—64 (1955). — COLLINGWOOD, E. F.: (1) On the linear and angular cluster sets of functions meromorphic in the unit circle. Acta math. **91**, 165—185 (1954). — (2) Sur le comportement à la frontière, d'une fonction méromorphe dans le cercle unité. C. R. Acad. Sci. Paris **240**, 1502—1504 (1955). — (3) Sur les ensembles d'indétermination maximum des fonctions analytiques. C. R. Acad. Sci. Paris **240**, 1604—1606 (1955). — (4) A theorem on certain classes of singularities defined by cluster sets. J. London Math. Soc. **30**, 422—424 (1955). — (5) On a theorem of Eggleston concerning cluster sets. J. London Math. Soc. **30**, 425—428 (1955). — (6) A theorem on prime ends. J. London Math. Soc. **31**, 344—349 (1956). — COLLINGWOOD, E. F., and M. L. CARTWRIGHT: (1) Boundary theorems for a function meromorphic in the unit circle. Acta math. **87**, 83—146 (1952). — EGGLESTON, H. G.: (1) A property of bounded analytic functions. Comment. Math. Helv. **30**, 139—143 (1956). — GROSS, W.: (1) Über die Singularitäten analytischer Funktionen. Monatsb. Math. u. Phys. **29**, 3—47 (1918). — (2) Zum Verhalten analytischer Funktionen in der Umgebung singulärer Stellen. Math. Z. **2**, 243—294 (1918). — JULIA, G.: (1) Leçons sur la représentation conforme des aires multiplement connexes. Paris 1934. — PLESSNER, A.: (1) Über das Verhalten analytischer Funktionen am Rande ihres Definitionsbereiches. J. reine u. angew. Math. **158**, 219—227 (1927). — POTYAGAILO, D. B.: (1) On the set of boundary values of meromorphic functions. Doklady Acad. Nauk SSSR., N. S. **86**, 661—663 (1952) [Russian]. — RUDIN, W.: (1) On a problem of COLLINGWOOD and CARTWRIGHT. J. London Math. Soc. **30**, 231—238 (1955). — SEIDEL, W.: (1) On the cluster values of analytic functions. Trans. Amer. Math. Soc. **34**, 1—21 (1932). — STOILOW, S.: (1) Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques. Paris 1938. — STREBEL, K.: (1) Über die konforme Abbildung von Gebieten unendlich hohen Zusammenhangs. Comm. Math. Helv. **27**, 101—127 (1953). — VALIRON, G.: (1) Sur les singularités des fonctions holomorphes dans un cercle. C. R. Acad. Sci. Paris **198**, 2065—2067 (1934). — WHYBURN, G. T.: (1) Open mappings on locally compact spaces. Memoirs Amer. Math. Soc. **1950**, No 1, 23 pp.

Lilburn Tower, Alnwick, Northumberland, England

(Eingegangen am 15. Juni 1956)

Einführung in die Atomphysik

Von **Wolfgang Finkelnburg**, Honorarprofessor an der Universität Erlangen. Vierte, verbesserte und ergänzte Auflage. Mit 226 Abbildungen. XI, 545 Seiten Gr.-8°. 1956. Ganzleinen DM 45.—

Inhaltsübersicht: Einleitung. — Atome, Ionen, Elektronen, Atomkerne, Photonen. — Atomspektren und Atombau. — Die quantenmechanische Atomtheorie. — Die Physik der Atomkerne. — Physik der Moleküle. — Festkörper-Atomphysik. — Tabelle der für die Atomphysik wichtigsten Konstanten und Beziehungen. — Sachverzeichnis.

Aus den Besprechungen: ... Die Tatsache, daß von 1948 bis 1956 nicht weniger als 4 Auflagen erschienen sind, zeigt besser als alles andere die Güte und die Beliebtheit des Buches. Dieser Erfolg ist einmal der Liebe zu verdanken, die der Verfasser zu seinem Stoff besitzt und die auch den Leser gefangen nimmt, und zum andern seiner großen pädagogischen Begabung. Er versteht es ausgezeichnet, durch die Art der Darstellung und durch geschickte bildliche Erläuterungen (Figuren, Schemata, Tabellen) den Leser auch in schwierige Zusammenhänge leicht eindringen zu lassen und ihn stets auf das Wesentliche hinzuführen. Der Gefahr, durch die schier verwirrend große Fülle des Stoffes erdrückt zu werden, ist der Verfasser durch klare und übersichtliche Unterteilungen entgangen. Sehr angenehm sind die Literaturangaben am Schlusse jedes der 7 Hauptabschnitte.

Als Einführung in das Gesamtgebiet der heute im Vordergrund des Interesses stehenden Atomphysik wird das Buch auch in der neuen Auflage zu seinen alten Freunden viele neue gewinnen. „*Die Naturwissenschaften*"

Die Tatsache, daß der dritten Auflage vom Dezember 1953 bereits im Januar 1956 die vierte Auflage folgen mußte — ohne daß es zu wesentlichen Änderungen kam — besagt mehr als viel Worte!

Dieses grundlegende und umfassende Werk zeichnet sich durch strenge Systematik und große Klarheit aus. Von den Naturwissenschaftlern und Ingenieuren wird es in gleicher Weise geschätzt werden, da es in aller wissenschaftlicher Strenge das Gesamtgebiet der Atomphysik behandelt, ohne daß dadurch die Verständlichkeit der Ausführungen beeinträchtigt wird.

Nach einer in seiner Geschlossenheit vorbildlichen Darstellung zur Begriffsbildung der Elementarteilchen werden die Atomspektren und der Atombau behandelt. Auf diesem Wege werden die Grundlagen gewonnen für die quantenmechanische Atomtheorie. Die Behandlung der Physik der Atomkerne erschöpft sich nicht nur in theoretischen Betrachtungen, sondern hier sind die Tendenzen angedeutet, die zu einer praktischen Anwendung der Kernenergie führen. Schließlich folgen die Kapitel „Physik der Moleküle" und „Festkörper-Atomphysik", stets mit der Blickrichtung auf die Anwendungen.

„Dieses Buch ist aus Freude an der Atomphysik geschrieben", sagte der Verfasser im Vorwort zur ersten Auflage. Er dürfte mit dieser Fassung des Buches sein Ziel erreicht haben, das ihm vorschwebte, nämlich: „Interesse und Freude an der Atomphysik zu wecken."

Das Buch ist in der bekannt sorgfältigen Form durch den Springer-Verlag ausgeführt worden. „*Metall*"

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete

Unter Mitwirkung der Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik" herausgegeben von **L. V. Ahlfors, R. Baer, R. Courant, J. L. Doob, S. Eilenberg, P. R. Halmos, T. Nakayama, H. Rademacher, F. K. Schmidt, B. Segre, E. Sperner.** Neue Folge.

Die Bezieher des „Zentralblatt für Mathematik" erhalten die „Ergebnisse der Mathematik" zu einem gegenüber dem Ladenpreis um 10% ermäßigten Vorzugspreis.

Soeben erschien:

13. Heft: **Some Properties of Differentiable Varieties and Transformations**

With Special Reference to the Analytic and Algebraic Cases. By **Beniamino Segre,** Rome (Ital.). (Reihe: Algebraische Geometrie. Besorgt von B. Segre, Rom.) VIII, 183 Pages Gr.-8°. 1957. Steif geheftet DM 36.—

Contents: Differential invariants of point and dual transformations. — Local properties of analytic transformations at their united points. — Invariants of contact and of osculation. The concept of cross-ratio in differential geometry. — Principal and projective curves of a surface, and some applications. — Some differential properties in the large of algebraic curves, their intersections, and self-correspondences. — Extensions to algebraic varieties. — Veronese varieties and modules of algebraic forms. — Linear partial differential equations. — Correspondences between topological varieties. — Historical notes and bibliography to each part. — Bibliography. Author Index. Analytic Index.

Früher erschienen:

9. Heft: **Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie**

Von Professor Dr. **F. Hirzebruch,** Princeton, N. J., USA. VIII, 165 Seiten Gr.-8°. 1956. Steif geheftet DM 30.80

10. Heft: **Structure of a Group and the Structure of its Lattice of Subgroups**

By **Michio Suzuki,** Urbana/Illinois, USA. (Reihe: Gruppentheorie. Besorgt von R. Baer, Urbana.) VII, 96 Seiten Gr.-8°. 1956. Steif geheftet DM 16.50

11. Heft: **Additive Zahlentheorie**

Von Professor Dr. **H.-H. Ostmann,** Berlin. 2. Teil: Spezielle Zahlenmengen. VI, 136 Seiten Gr.-8°. 1956. Steif geheftet DM 22.—

12. Heft: **Algebraic Varieties**

By Professor **Mario Baldassarri,** Padova, Italien. (Reihe: Algebraische Geometrie. Besorgt von B. Segre, Rom.) Mit IX, 195 Seiten Gr.-8°. 1956.
Steif geheftet DM 36.—

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG. Würzburg
Printed in Germany